SPE PC 2
DEVOIR DE MATH 2
SAMEDI 13 OCTOBRE

Questions de cours:sur 5 points

1. Enoncez rigoureusement les trois théorèmes qui permettent de justifier :

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

2. Vous devez étudier f et vous avez déjà prouvé que f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Indiquez toutes les méthodes dont vous disposez pour montrer que f est un isomorphisme . (précisez clairement les hypothèses éventuelles de chaque méthode)

3. Définition de deux matrices équivalentes . Définition de deux matrices semblables.

   Quelle méthode utilisez vous pour étudier si une matrice triangulaire T est semblable à une matrice M à priori quelconque?

4. Comparaison d'une série et d'une intégrale :

   - Sous quelles hypothèses peut-on dire que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_0^n f(t)dt$ admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$?
   - Sous les hypothèses précédentes quel encadrement du reste a-t-on?

5. Donner un exemple de suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ diverge et telle que la suite (u_n) converge.

EXERCICE EXTRAIT DES FEUILLES Sur 4 points

Soit pour tout entier $n \geq 0$: $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$.
Calculer la limite de la suite (a_n) .
En utilisant un changement de variable déterminer a tel que $u_n \sim \frac{a}{n}$.

PROBLEME (Centrale TSI 1997 parties I et II) sur 11 points.

Remarques:

- Dire que $E = F \oplus G$, c'est dire que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E.
- au IA4 :Remplacez la question par :"Montrez que A et S sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- au IC : une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière TSI

Dans tout le problème, les matrices utilisées appartiennent à $M_3(\mathbb{R})$. Toute matrice M de $M_3(\mathbb{R})$ est notée

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix}.$$

On appelle B la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$. Elle est formée des matrices :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire :

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + kE_4 + lE_5 + mE_6 + rE_7 + sE_8 + tE_9.$$

À une telle matrice on associe les huit nombres

$s_1 = a+b+c$; $s_2 = k+l+m$; $s_3 = r+s+t$;

$s_4 = a+k+r$; $s_5 = b+l+s$; $s_6 = c+m+t$;

$s_7 = a+l+t$; $s_8 = r+l+c$.

On note :

- I la matrice unité ;
- J la matrice dont les neuf coefficients sont égaux à un ;
- S le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques ;
- A le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques ;
- V le sous-espace engendré par J ;
- T l'ensemble des matrices pour lesquelles le nombre s_7 est nul (ensemble des matrices de trace nulle).

Partie I - Généralités

I.A - *Questions préliminaires*

I.A.1) Quelles sont les dimensions de S et de A ?

I.A.2) Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

I.A.3) Montrer que $S \cap T$ et V sont deux sous-espaces vectoriels de S, supplémentaires dans S. Quelles sont leurs dimensions respectives ?

I.A.4) Montrer que $M_3(\mathbb{R}) = A \oplus [(S \cap T) \oplus V]$.

I.B - On considère l'application φ qui, à la matrice M, associe l'élément $(s_1, s_2, \ldots, s_8)$ de $\mathbb{R}^8$.

I.B.1) Montrer que φ est une application linéaire de $M_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$.

I.B.2) Écrire la matrice de φ en rapportant l'espace de départ à la base B et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^8$ à sa base canonique.

I.B.3) Montrer que le rang de cette matrice est 7 (on pourra remarquer que l'une des lignes est combinaison linéaire de celles qui la précèdent, puis considérer une combinaison linéaire nulle des 7 autres lignes).

I.B.4) En déduire la dimension du noyau de φ.

I.C - Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension p et soit λ une forme linéaire non nulle sur E. Soit H le noyau de λ et soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension q.

I.C.1) Donner, [redacted], la dimension de H.

I.C.2) Soit λ' la restriction de λ à F : λ' est l'application qui, à $x \in F$, associe $\lambda(x)$. Exprimer $\mathrm{Ker}\lambda'$ en fonction de F et H.

I.C.3) En déduire que la dimension de $F \cap H$ est égale à q ou à $q-1$.

I.C.4) Montrer que, si F contient un vecteur n'appartenant pas à H, $F \cap H$ est de dimension $q-1$.

Partie II - Matrices magiques

Dans cette partie, on s'intéresse aux matrices M, dites **magiques**, pour lesquelles les huit nombres $s_1, s_2, \ldots, s_8$ sont tous égaux entre eux. On note α la valeur commune de ces huit sommes. Le réel α est appelé "**somme**" de la matrice magique M. L'ensemble des matrices magiques est noté $\mathcal{M}$.

II.A - Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

II.B - *Matrices magiques symétriques*

II.B.1) Montrer que $\mathcal{M} \cap S \cap T$ et $\mathcal{M} \cap A$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$. Trouver pour chacun d'eux une base et sa dimension.

II.B.2) Montrer que $\mathcal{M} \cap S = (\mathcal{M} \cap S \cap T) \oplus V$.

II.C - *Description des matrices magiques*

II.C.1) Montrer que $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap S) \oplus (\mathcal{M} \cap A)$ [redacted]

II.C.2) En déduire une base de $\mathcal{M}$. Montrer que les matrices magiques d'ordre trois sont les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} x+z & -x+y+z & -y+z \\ -x-y+z & z & x+y+z \\ y+z & x-y+z & -x+z \end{pmatrix},$$

où x, y et z sont des réels quelconques.

II.C.3) Montrer qu'il n'existe qu'une matrice magique vérifiant $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ et écrire cette matrice.

II.C.4) Trouver la dimension de $\mathcal{M} \cap T$ [redacted]

FIN DU D.S.

Partie III - Étude spectrale

Dans toute la suite (parties III et IV), E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{E} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère une matrice magique

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$$

et on note u l'endomorphisme de E qui admet M comme matrice dans la base $\mathcal{E}$. On désigne par $\vec{v}$, le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{E}$.

III.A - Montrer que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur propre de M. Préciser la valeur propre associée λ_1.

III.B - On note λ_2 et λ_3 les deux autres valeurs propres (réelles ou complexes, distinctes ou non) de la matrice M. Écrire les termes de degrés 3 et 2 du polynôme caractéristique de M ; calculer la somme des 3 valeurs propres réelles ou complexes de M en fonction des coefficients a, l et t de M. En déduire que λ_2 et λ_3 sont opposées.

III.C - Former une équation cartésienne du plan vectoriel Π orthogonal à $\vec{v}$ et montrer que ce plan est stable par u.

III.D -

III.D.1) Préciser la direction du vecteur $u(\vec{i} - \vec{k})$, par rapport à celle de $\vec{v}$.

III.D.2) Montrer que $u(\vec{i} - \vec{k})$ est orthogonal à $\vec{i} - \vec{k}$.

III.E - On suppose dans cette question III.E que M est une matrice magique symétrique. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D ayant les propriétés suivantes :

- les coefficients de la première colonne de P sont tous égaux entre eux ;
- D est de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

où α est la somme (définie dans la partie II) de la matrice M et β un réel positif ou nul ;

- $M = PD\,{}^tP$ (où ${}^tP$ est la matrice transposée de P).

Partie IV - Matrices magiques orthogonales

Si W est un sous-espace vectoriel de E, l'orthogonal $W^\perp$ de W est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de W. On rappelle que $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de W. On rappelle par ailleurs que la symétrie orthogonale par rapport à W est, par définition, la symétrie par rapport à W parallèlement à $W^\perp$. On dit que la symétrie orthogonale par rapport à W est un retournement (ou un demi-tour) si W est une droite.

IV.A - *Étude préliminaire*

Soit f un endomorphisme de E et S la matrice de f dans $\mathcal{E}$.

IV.A.1) Montrer que, pour que f soit une symétrie orthogonale par rapport à un certain sous-espace vectoriel W, il faut et il suffit que S soit à la fois symétrique et orthogonale.