e4a PSI 2007

Math A , pazrties 1 à 4

Questions de cours.

1. Donner la définition du rang d'une matrice.
2. Citer sans démonstration le théorème du rang.
3. Quand dit-on que deux matrices sont semblables ? Ont-elles alors le même rang ? On ne demande pas de justification.
4. Qu'appelle-t-on polynôme annulateur d'un endomorphisme ? D'une matrice ?

Problème.

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel normé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.

La matrice unité de cet espace sera noéte I_n et la matrice nulle O_n.

L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.

On note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

- v^0 est l'endomorphisme unité,
- $\forall m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v \circ v^m$.
- L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).

On note J la matrice carrée d'ordre n définie par

$$J(\lambda) = (u_{i,j}) \text{ avec } \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, n-1\},\ u_{i+1,i} = 1 \\ u_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice :

$$\alpha(M) = \lim_{m\to+\infty} S_m \quad \text{avec} \quad S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!}$$

On admettra et on utilisera sans le démontrer que cette matrice existe toujours et que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $\alpha(A + B) = \alpha(A)\alpha(B)$.

1. Quelques calculs préliminaire.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Calculer les matrices $A + I_3, (A + I_3)^2, A - 2I_3$, et préciser pour chacune des 3 matrices son rang.

2. Vérifier que $\ker(A + I_3)^2 \oplus \ker(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$.

3. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Quelques propriétés de la matrice J.

1. Déterminer le rang de J.

2.

2.1. Déterminer J^k pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n-1$, puis pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$.
Pour $k \leq n-1$, on exprimera les coefficients $\left(J^k\right)_{i,j}$ en utilisant le symbole de Kronecker

2.2. Vérifier que pour $k \geq 1m$, J^k est nilpotente.

3. Déterminer $\alpha(J)$ puis $U = \alpha(J) - I_n$.

4. Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.
Montrer que toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

3. Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de

$$r = \inf\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$$

3. Montrer que :

(i) $\forall m < r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$,

(ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$,

(iii) $\forall m \geq r,\ \ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

4. Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, **de rang** $n-1$ et vérifiant $V^n = O_n$. On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

1.1. Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

1.2. Prouver que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.

1.3. Vérifier alors que l'on a

$$\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$$

1.4. En déduire

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \dim(\ker(v^i)) \leq i$$

1.5. Démontrer qu'en fait $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \dim(\ker(v^i)) = i$.

2. Prouver alors que $v^{n-1} \neq \theta$.

3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que

$$B_1 = (e, v(e), v^2(e), \ldots, v^{n-1}(e))$$

soit une base de E.

4. Ecrire la matrice de v dans cette base

5. Montrer que deux matrices nilpotents de rang $n-1$ sont semblables.