Concours Communs Polytechniques
Filière PC Math 1 2005

Sur l'exponentielle de matrice .

PARTIE I

I.1) Exemple

- a) En développant par rapport à la seconde ligne (colonne) on a $\boxed{\det(M) = 2}$
- b) On calcule les cofacteurs $A_{1,1} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 4$, $A_{1,2} = (-1)^3 \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = -6, \cdots$

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

  d'où :

$$\boxed{A.{}^tCom(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

  remarque : à vérifier avec I.2.d)

- c) On a $\varkappa_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 3 \\ -6 & -1-\lambda & -3 \\ -6 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = (\lambda+1)^2 (2-\lambda)$
- d) $(I_3 + M)(2I_3 - M) = \cdots = 0_3$ et donc comme $\varkappa_M(M) = (M + I_3)^2(2I_3 - M) = (I_3 + M)((I_3 + M)(2I_3 - M) = 0_3$

$$\boxed{\varkappa_M(M) = 0_3}$$

  remarque : toujours à vérifier avec I.4.c)

I.2) propriétés de la comatrice :
remarque : prendre $A = M$ et quelques exemples n'est pas inutile pour voir B

- a) C'est le développement de la matrice B par rapport à la colonne j , en remarquant que une fois retirée les colonnes j de A et B on obtient les mêmes matrices donc les mêmes cofacteurs.
- b) On pose $\beta_k = a_{k,l}$ puis on sépare en deux :

$$\begin{cases} \text{si } l = j \text{ alors } \beta_k = a_{k,j} \text{ et donc } B = A \text{ et } \sum_{k=1}^n a_{k,l}A_{k,l} = \det(B) = \det(A) \\ \text{si } l \neq j \text{ alors la matrice } B \text{ a deux colonnes égales } (l \text{ et } j) \text{ d'où } \sum_{k=1}^n a_{k,l}A_{k,l} = \det(B) = 0 \end{cases}$$

  d'où :

$$\forall (l;j) \in \mathbb{N}_n^2 \ , \ \sum_{k=1}^n a_{k,l}A_{k,l} = \det(A)\,\delta_{l,j}$$

- c) On introduit une matrice B' obtenue en remplaçant la i^{eme} ligne de A par la ligne formée des coefficients β_i . On a alors $\det(B) = \sum_{k=1}^n \beta_k A_{i,k}$, puis on remplace les β_k par a_{lk}
- d) Si $M = {}^tCom(A)$ on a pour tout (i,j) $m_{i,j} = A_{j,i}$, d'où $(AM)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}m_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}A_{j,k} = \det(A)\,\delta_{i,j}$ d'après 1.2.c) et $(MA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^n A_{k,i}a_{k,j} = \det(A)\delta_{i,j}$ d'après 1.2.b)

  On a donc :

$$\boxed{A.{}^tCom(A) = {}^tCom(A).A = \det(A)I_n}$$

I.3)

- a) pour $n=1$: $\det(G(x)) = G_{1,1}(x)$, et $G_{1,1}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1

  On suppose que pour toute famille $(H_{i,j})_{1\leq i\leq n-1, 1\leq j\leq n-1}$ de polynômes de degré inférieur ou égal à 1 $\det(H_{i,j}(x)) = Q_1(x)$, Q_1 étant un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. On a alors par développement par rapport à la première colonne

  $$\det(G) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} G_{i,1}(x) \det(C_{i,1}(x))$$

  où $C_{i,1}(x)$ est une matrice extraite de $G(x)$ de taille $n-1\times n-1$. Les coefficients de $C_{i,1}(x)$ sont des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1 , donc par l'hypothèse de récurrence il existe un polynôme P_i de degré inférieur ou égal à $n-1$ et tel que $\det(C_{i,1}(x)) = P_i(x)$. On a alors

  $$\det(G) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} G_{i,1}(x) P_i(x)$$

  Par les théorèmes sur le degré d'une somme et d'un produit de polynôme on a $d^\circ\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} G_{i,1} P_i\right) \leq n$. D'où le résultat par récurrence.

- b) Une matrice est nulle si et seulement si tous ses coefficients le sont donc , en notant $d_{i,j}^{(k)}$ les coefficients de D_k on a :

  $$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \ , \ \sum_{k=0}^{p} d_{i,j}^{(k)} x^k = 0$$

  Une fonction polynôme étant nulle si et seulement si tous ses coefficients le sont on a $\forall k, \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $d_{i,j}^{(k)} = 0$ $\boxed{D_k = 0}$

I.4) le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur

- a) chaque coefficient de $C(x)$ est un cofacteur de $(A - xI_n)$ donc c'est , au signe près , le déterminant d'une matrice $n-1\times n-1$ ayant pour coefficients des fonctions polynômes de degré au plus 1 . Donc d'après I.3.a) chaque coefficient de $C(x)$ est une fonction polynôme de degré au plus $n-1$. Il existe donc des réels $\left(b_{i,j}^{(k)}\right)$ tels que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$ $(C(x))_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{i,j}^{(k)} x^k$. En prenant pour B_k la matrice de coefficients $b_{i,j}^{(k)}$ on a la relation voulue.

- b) D'après I.2 on a $(A - xI_n)\, C(x) = \det(A - xI_n) I_n = \varkappa_A(x) I_n$. Or

  $$(A - xI_n)\, C(x) = (A - xI_n) . \sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k A.B_k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} B_k = A.B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k (A.B_k - B_{k-1}) - x^n B_{n-1}$$

  on a donc

  $$AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k (A.B_k - B_{k-1}) - x^n B_{n-1} = \varkappa_A(x) I_n = \sum_{k=0}^{n} x^k \alpha_k I_n$$

  On utilise alors I.3.b) avec $D_0 = AB_0 - \alpha_0 I_n, \forall k \in \mathbb{N}_{n-1}$, $D_k = A.B_k - B_{k-1} - \alpha_k I_n$ et $D_n = -B_{n-1} - \alpha_n I_n$ pour avoir le résultat voulu.

- c) Si on multiplie à gauche la ligne $A.B_k - B_{k-1} = \alpha_k I_n$ par A^k on obtient $\alpha_k A^k = A^{k+1}.B_k - A^k.B_{k-1}$ et de même $\alpha_n A^n = -A^n B_{n-1}$. D'où

  $$\begin{aligned}
  \varkappa_A(A) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = A.B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(A^{k+1}.B_k - A^k.B_{k-1}\right) - A^n B_{n-1} \\
  &= A.B_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} A^{k+1} B_k - \sum_{k=0}^{n-2} A^{k+1}.B_k\right) - A^n B_{n-1} \\
  &= A.B_0 + (A^n.B_{n-1} - AB_0) - A^n B_{n-1} = 0
  \end{aligned}$$

  On a bien vérifié :

  $$\boxed{\varkappa_A(A) = 0}$$

PARTIE 2

II.1

- a) On peut remarquer que $C_1 = I_n$ puis $\forall k \in [[2,n]]$, $C_k = (A - \lambda_{k-1} I_n) .C_{k-1}$ .De plus

$$A.(A - \lambda_{k-1} I_n) = A^2 - \lambda_{k-1} A = (A - \lambda_{k-1} I_n) .A$$

d'où le résultat par récurrence : on a $A.C_1 = C_1.A$ puis si $A.C_{k-1} = C_{k-1}.A$ alors $A.C_k = C_k.A$

- b) $(A - \lambda_n I_n) .C_n = \prod_{k=1}^{n} (A - \lambda_n I_n) = \varkappa_A(A) = 0$ d'après la première partie.

II.2 : une solution de l'équation différentielle

- a) Par définition de Y les fonctions y_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc E_k est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus $Y'(s) = H.Y(s)$ donc $y_1'(s) = \lambda_1 y_1(s)$ et $\forall k \in [[2,n]]$, $y_k'(s) = y_{k-1}(s) + \lambda_k y_k(s)$
On a alors

$$\begin{aligned} E_A'(s) &= \sum_{k=1}^{n} y_k'(s) C_k = \lambda_1 y_1(s) C_1 + \sum_{k=2}^{n} (y_{k-1}(s) + \lambda_k y_k(s)) C_k = \lambda_1 y_1(s) C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s) C_{k+1} + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k y_k(s) C_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s) C_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k(s) C_k = \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s) (C_{k+1} + \lambda_k C_k) + y_n(s) \lambda_n C_n \end{aligned}$$

Or $C_{k+1} + \lambda_k C_k = (A - \lambda_k I_n) .C_k + \lambda_k C_k = A.C_k$ pour $k \leq n-1$. Ce qui donne :

$$E_A'(s) = \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s) A.C_k + y_n(s) \lambda_n C_n$$

reste à vérifier $\lambda_n C_n = A C_n$ soit $(A - \lambda_n I_n) C_n = 0$. C'est le résultat de la question II.1.b)

$$\boxed{E_A'(s) = A.E_A(s)}$$

De plus $E_A(0) = \sum_{k=1}^{n} y_k(0) C_k$. Or $Y(0) = Y_0$ et donc $y_1(0) = 1$ et pour $k \geq 2$ $y_k(0) = 0$ donc $\boxed{E_A(0) = C_1 = I_n}$

- b) Par commutativité (cf II.1.a) on peut remarquer que $A.C_k = C_k.A$ et donc par linéarité du produit $A.E_A(s) = E_A(s).A$. Et donc

$$\boxed{E_A'(s) = A.E_A(s) = E_A(s).A \text{ et } E_A(0) = I_n}$$

- c) ϕ est le produit de deux fonctions dérivables , donc est dérivable et

$$\phi'(s) = E_A(s). (E_A(-s))' + E_A'(s).E_A(-s) = E_A(s). (-E_A'(-s)) + E_A'(s).E_A(-s)$$

en utilisant le théorème de dérivation d'une fonction composée . De plus $E_A'(s) = A.E_A(s)$ donc $E_A'(-s) = A.E_A(-s)$ donc

$$\phi'(s) = -E_A(s).A.E_A(-s) + A.E_A(s).E_A(-s)$$

et comme $A.E_A(s) = E_A(s).A$ on a $\phi'(s) = 0$. Tous les coefficients de la matrice $\phi(s)$ ont une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ (intervalle) donc tous les coefficients sont constants donc aussi ϕ et comme $\phi(0) = E_A(0)^2 = I_n$

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, \phi(s) = I_n}$$

Le même calcul avec $\theta(s) = E_A(-s).E_A(s)$ donne : $\forall s \in \mathbb{R}, \theta(s) = I_n$.
On a donc : $\forall s \in \mathbb{R} : E_A(s).E_A(-s) = E_A(-s).E_A(s) = I_n$, et donc

$$\boxed{E_A(s) \text{ est inversible d'inverse } E_A(-s)}$$

- d) Le même type de calcul donne :

$$\psi'(s) = E_A(-s).F'(s) - E_A'(-s).F(s) = E_A(-s).A.F(s) - A.E_A(-s).F(s) = 0$$

donc ψ est constante. Or $\psi(0) = E_A(0).F(0) = I_n$. Donc pour tout s $\psi(s) = I_n$ et donc $E_A(-s).F(s) = I_n$. On sait que $E_A(-s)$ est inversible donc

$$F(s) = E_A(-s)^{-1} = E_A(s)$$

$$\boxed{E_A \text{ est l'unique solution du problème (1)}}$$

- e) Idem avec $\theta(s) = F(s)E_A(-s)$

  La fonction précédente ne marche pas car on ne peut pas commuter $F(s)$ et $A(s)$

II.3 : exemple

- Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Avec les calculs de I.1 je prend $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$ *(vous pouvez faire un autre choix sur l'ordre le résultat sera le même avec des calculs intermédiaires différents)*

  On a donc $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = (M - 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ et $C_3 = (M + I_3)(M - 2I_3) = 0$ d'après I.1.d)

  et $e^{sM} = y_1(s)C_1 + y_2(s)C_2 + 0$

  reste à calculer $y_1(s)$ et $y_2(s)$:

- $y_1(s)$ vérifie $y_1(0) = 1$ et $y_1'(s) = 2y_1(s)$ donc $y_1(s) = e^{2s}$

- $y_2(s)$ vérifie $y_2(0) = 0$ et $y_2'(s) = -y_2(s) + e^{2s}$ .Les solutions de l'équation homogène sont $y(s) = Ke^s$ et la recherche d'une solution particulière de $y_2'(s) = -y_2(s) + e^{2s}$ du type $s- > ke^{2s}$ donne $k = 1/3$ d'où $y_2(s) = \frac{e^{2s} - e^{-s}}{3}$

$$\begin{aligned} e^{sM} &= e^{2s}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{2s} - e^{-s}}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} = e^{2s}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(e^{2s} - e^{-s}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= e^{2s}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + e^{-s}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

remarque : par prudence vérifier le calcul en comparant $\left(e^{sM}\right)'$ et $M.e^{sM}$

II.4 Une solution est $Z(s) = e^{sA}Z_0$ en effet :

- $Z(0) = e^{0A}.Z_0 = E_A(0).Z_0 = I_n.Z_0 = Z_0$

- $(Z(s))' = \left(e^{sA}\right)'.Z_0 + e^{sA}.Z_0' = A.e^{sA}.Z_0 + 0 = A.Z(s)$

  De plus on sait que le problème de Cauchy admet une unique solution vérifiant une condition initiale donnée . d'où l'unicité de la solution.

PARTIE III

III.1 Par la formule de définition chaque matrice C_k est un polynôme en A et donc par combinaison linéaire $e^{sA} = E_A(s) = \sum_{k=1}^{n} y_k(s)C_k$ aussi.

On peut remarquer que $e^{sA} = P_A(A)$ avec $d^\circ(P_A) \leq n - 1$ et que les coefficients dépendent des valeurs propres donc de A.

Je note $e^{sA} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,A}A^k$

III.2 quelques calculs sur les exponentielles de matrices

- a) On a

$$A.e^{sB} = A.\sum_{k=0}^{n-1} p_{k,B}B^k = \sum_{k=0}^{n-1} A.\left(p_{k,B}B^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,B}B^k.A = e^{sB}.A$$

  car $A.B = B.A \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $A.B^k = B^k.A$

- b)De même

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(p_{k,A}A^k\right)e^{sB} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{sB}\left(p_{k,A}\,A^k\right)$$

- c) On a par définition de $E_{A+B}(s)$

$$\mu'(s) = (A + B)\,\mu(s) \text{ et } \mu(0) = I_n$$

  et on a (en utilisant la commutativité de e^{sA} et B)

$$\left\{\begin{array}{l} \nu'(s) = \left(e^{sA}\right)'.e^{sB} + e^{sA}\left(e^{sB}\right)' = A.e^{sA}.e^{sB} + e^{sA}.B.e^{sB} = (A + B).\left(e^{sA}.e^{sB}\right) = (A + B).\nu(s) \\ \nu(0) = e^{0A}.e^{0B} = I_n.I_n = I_n \end{array}\right.$$

  Par unicité de la solution de l'équation différentielle $\left\{\begin{array}{c} X'(s) = A_0X(s) \\ X(0) = I_n \end{array}\right.$ avec $A_0 = A + B$(cf II.2.d)) *on* a : $\forall s :\in \mathbb{R}$, $\mu(s) = \nu(s)$ En particulier pour $s = 1$

$$\boxed{(AB = BA) \Rightarrow \left(e^{A+B} = e^A.e^B\right)}$$

III.3 un contre exemple si $A.B \neq B.A$

On constate $A.B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

pour A on a $Sp(A) = \{0,1\}$ d'où $C_1 = I_2$ et $C_2 = A$

y_1 vérifie $y_1'(s) = 0$ et $y_1(0) = 1$ donc $y_1(s) = 1$

y_2 vérifie $y_2'(s) = y_2(s) + y_1(s) = y_2(s) + 1$ et $y_2(0) = 0$ d'où $y_2(s) = e^s - 1$

donc : $e^{sA} = 1.C_1 + y_2(s)A = (e^s - 1)A + I_3$

pour B on a $Sp(B) = \{0,1\}$ d'où (même calcul) $e^{sB} = (e^s - 1)\, B + I_3$

pour $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a encore $Sp(A+B) = \{0,2\}$ et $e^{s(A+B)} = \frac{(e^{2s}-1)}{2}\,(A+B) + I_3$

d'où $\boxed{e^A = (e-1)A + I_3 = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^B = (e-1)B + I_3 = \begin{pmatrix} e & 1-e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{A+B} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^A.e^B = \begin{pmatrix} e^2 & 2e-1-e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

III.4 autres propriétés de e^{sA}

- a) On pose $\phi : s -> e^{s\left(P^{-1}.A.P\right)}$ et $\psi : -> P^{-1}.e^{sA}.P$ et on vérifie que les deux fonctions vérifient la même équation différentielle:

  $\phi(0) = e^{0\left(P^{-1}.A.P\right)} = I_n$ et $\psi(0) = P^{-1}.I_n.P = I_n$

  $\phi'(s) = \left(P^{-1}.A.P\right).\phi(S)$ et $\psi'(s) = P^{-1}.\left(A.e^{sA}\right).P = P^{-1}.A.\left(P.\psi(s).P^{-1}\right).P = P^{-1}.A.P.\psi(s)$

  remarque : attention à la rédaction P et e^{sA} ne commute pas.

  les deux fonctions sont solutions de $E'(s) = B.E(s)$, $E(0) = I_n$ avec $B = P^{-1}.A.P$. Par unicité de la solution d'un tel problème on a pour tout s $\phi(s) = \psi(s)$

  $$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, e^{s\left(P^{-1}.A.P\right)} = P^{-1}.e^{sA}.P}$$

- b) même principe avec : $\phi : s -> e^{s\,{}^t(A)}$ et $\psi : -> {}^t\left(e^{sA}\right)$

  $\phi(0) = e^{0\,{}^tA} = I_n \quad \psi(0) = {}^tI_n = I_n$

$\phi'(s) = {}^tA\phi(s)$ et $\psi'(s) = \left({}^t\left(e^{sA}\right)\right)' = {}^t\left(\left(e^{sA}\right)'\right) = {}^t\left(e^{sA}.A\right) = {}^tA.\psi(s)$; <u>En utilisant II.2.b)</u> et la linéarité de la transposition pour dire que si F est dérivable à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ${}^t(F') = ({}^tF)'$

les deux fonctions sont solutions de $E'(s) = B.E(s)$, $E(0) = I_n$ avec $B = {}^tA$. Par unicité de la solution d'un tel problème on a pour tout s $\phi(s) = \psi(s)$

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, e^{s\,{}^t(A)} = {}^te^{sA}}$$

partie IV

IV.1 si $Mat(x) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ on a $Mat(u \wedge x) = \begin{pmatrix} bx_3 - cx_2 \\ cx_1 - ax_3 \\ ax_2 - bx_1 \end{pmatrix} = A.X$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

IV.2 par la règle de Sarrus ou en développant

$$\varkappa_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -c & b \\ c & -\lambda & -a \\ -b & a & -\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\left(\lambda^3 + \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\lambda\right)$$

Comme u est un vecteur de norme 1 il reste $\boxed{\varkappa_A(\lambda) = -\left(\lambda^3 + \lambda\right)}$

On déduit du I.4.c: $-\left(A^3 + A\right) = 0$ soit $A^3 = -A$

IV.3 toujours avec l'algorithme du II :

le polynôme caractéristique donne $Sp(A) = \{0, i, -i\}$ d'où :

- $C_1 = I_3$, $C_2 = A$, $C_3 = A.(A - iI_3) = A^2 - iA$
- y_1 vérifie $y_1'(s) = 0$ et $y_1(0) = 1$ donc $y_1(s) = 1$
- y_2 vérifie $y_2'(s) = iy_2(s) + 1$ et $y_2(0) = 0$ soit $y_2(s) = \frac{e^{is}-1}{i} = i(1 - e^{is})$
- y_3 vérifie $y_3'(s) = -iy_3(s) + i\left(1 - e^{is}\right)$, $y_3(0) = 1$.

  On cherche une solution particulière en superposant une solution de $y' = -iy + i$ (soit $y = 1$) et une solution de $y' = -iy - ie^{is}$ (soit $y = -\frac{e^{is}}{2}$)

  $$y_3(s) = 1 - \frac{1}{2}e^{is} - \frac{1}{2}e^{-is}$$

D'où

$$\begin{aligned}
e^{sA} &= I_3 + i\left(1-e^{is}\right)A + \left(1-\frac{1}{2}e^{is}-\frac{1}{2}e^{-is}\right)\left(A^2-iA\right)\\
&= I_3 + i\left(\frac{e^{-is}-e^{is}}{2}\right)A + \left(1-\frac{1}{2}e^{is}-\frac{1}{2}e^{-is}\right)A^2\\
&= I_3+\sin(s)A+(1-\cos(s))A^2
\end{aligned}$$

On peut alors utiliser $II.4$

$$\boxed{X(s)=\left(I_3+\sin(s)A+(1-\cos(s))A^2\right)X_0}$$

Remarque :On peut aussi vérifier que est solution $\left(I_3+\sin(s)A+(1-\cos(s))A^2\right)$ *du problème (1)*

IV.4 . En comparant avec la matrice trouvée au IV.1 il suffit de prendre $a=1, b=c=0$. On prend donc une base orthonormée telle que le premier vecteur de base soit u(elle existe car u est unitaire)
soit alors $B_0=(u,v,w)$ la base orthonormée que je choisi directe . Soit U,V,W les matrices de u,v,w dans la base initiale
On a $AU=0$ (car $u\wedge u=0$) $AV=W$ et $AW=-V$ donc

- $mat_B(g(u))=e^{sA}.U=U+\sin(s)A.U+(1-\cos(s))A.A.U=U$ donc $g(u)=u$
- $mat_B(g(v))=e^{sA}V=V+\sin(s)W+(1-\cos(s))(-V)=\cos(s)V+\sin(s)W$
- $mat_B(g(w))=e^{sA}W=W+\sin(s)(-V)+(1-\cos(s))(-W)=\cos(s)W-\sin(s)V$

  d'où $mat_{B_0}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(s)&-\sin(s)\\0&\sin(s)&\cos(s)\end{pmatrix}$. $\boxed{\text{On obtient une rotation d'axe dirigé par } u \text{ et d'angle } s}$.

Si on note P la matrice de passage telle que $B=PAP^{-1}$ on a d'après III.4 :

$$e^{sB}=e^{sPAP^{-1}}=Pe^{sA}P^{-1}=PMat_B(g)P^{-1}=Mat_{B_0}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(s)&-\sin(s)\\0&\sin(s)&\cos(s)\end{pmatrix}$$