Concours commun polytechniquePSI 2005 math 1
I. Quelques propriétés de $F = \theta(f)$.

1.1. $\theta(1)(x) = \int_x^{x+1} dt = 1$

1.2. Soit $k \in \mathbb{N}^*.\theta(t^k)(x) = \int_x^{x+1} t^k \ dt = \frac{1}{k+1}((x+1)^{k+1} - x^{k+1})$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : \theta(t^k)(x) = \frac{1}{k+1}((x+1)^{k+1} - x^{k+1})}$$

2.1. f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ or si ϕ est une telle primitive de f

$$\forall x \in, \ F(x) = \phi(x+1) - \phi(x)$$

Par différence de fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ on montre donc $\boxed{F \in \mathcal{C}^1}$ et comme $\phi' = f$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ F'(x) = f(x+1) - f(x)}$$

2.2. Si f croît sur $[x_0, +\infty[$ alors pour $x \geq x_0$ on a $f(x+1) - f(x) \geq 0$. F' est donc positive sur $[x_0, +\infty[$. F y est donc croissar démonstration symétrique si f décroît.

2.3. F étant C^1, F est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement F' y est nulle ce qui équivaut à : $\forall x, \ f(x+1) = f(x)$. Comme f es continue, cette condition équivaut à $f \in \mathcal{C}_1^0$.

$$\boxed{F \text{ est constante si et seulement si } f \in C_1^0}$$

2.4. $f : t \mapsto |\sin(\pi t)|$ étant élément de $\mathcal{C}_1^0$, F est constante. Or $F(0) = \int_0^1 |\sin(\pi t)|\ dt = \int_0^1 \sin(\pi t)\ dt = \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 =$ $\forall x \in \mathbb{R} :$, $\theta\left(x \to |\sin(\pi x|\right)(x) = \frac{2}{\pi}$

2.5. On peut appliquer l'égalité des accroissements finis à la primitive ϕ de f déjà introduite :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \exists c \in]x, x+1[\ , F(x) = \phi(x+1) - \phi(x) = \phi'(c) = f(c)$$

D'après l'encadrement $\lim_{x \to +\infty}(c) = +\infty$ et donc par composition

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty}(F(x)) = L_1}$$

3.1. Le changement de variable $x = -t$ donne

$$\psi(-u) = \int_{-u-1/2}^{-u+1/2} f(t)\ dt = \int_{u-1/2}^{u+1/2} f(-x)\, dx$$

Ainsi, $\underline{\psi \text{ a la parité de } f}$.

3.2. $\phi(u) = F(u - 1/2)$ et $\phi(-u) = F(-u - 1/2)$

- si f est paire, $F(u-1/2) = F(-u-1/2)$ soit $F(x) = F(1-x)$ et donc le graphe de F est symétrique par rappoı à la droite $x = -1/2$.
- si f est impaire, $F(u-1/2) = -F(-u-1/2)$ soit $F(x) = -F(1-x)$ et donc le graphe de F est symétrique pa rapport au point $(-1/2, 0)$.

4.1. Soit $f_k : t \mapsto \frac{e^{-kt^2}}{k^2+1}$. Pour prouver la continuité de $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ sur $\mathbb{R}$on doit prouver la continuité des f_k **et la convergenc normale de la série sur $\mathbb{R}$ ou sur tout segment**. La convergence normale découle de la majoration: $\forall t \in \mathbb{R} : f_k(t)$: $\frac{1}{k^2+1}$. Le majorant étant le terme général d'une série convergente indépendante de t . , Les f_k étant continues, on a dor

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^0}$$

4.2. Pour prouver que $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est C^1 on doit prouver que chaque f_k est C^1 **et que la série des dérivées converg normalement sur tout segment**

- sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou $\mathbb{R}^{-*}$) c'est bon :

  f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f_k'(t) = \frac{-2kt}{k^2+1} e^{-kt^2}$On remarque alors que sur $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

$$\forall t \in [a, b], \ |f_k'(t)| \leq \frac{2kb}{k^2+1} e^{-ka^2}$$

$v_k = \frac{2kb}{k^2+1} e^{-ka^2}$est indépendant de t et, $k^2 v_k$ admet une limite finie (0) quand $k \to +\infty$. C'est donc le terme génér d'une série convergente. $\sum f_k'$ est ainsi normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*) \text{ et } \forall t \neq 0, \ f'(t) = -2t \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k e^{-kt^2}}{k^2+1}$$

- Sur $\mathbb{R}$ il faut être plus précis : car la série $\sum \frac{2kb}{k^2+1}$ diverge. Comme on ne sait pas si la réponse est "oui" ou "non" l
plus simple est de calculer exactement la norme infinie de f_k.
cherchons à majorer $|f_k'|$ en étudiant les variations sur $\mathbb{R}^+$ (grâce à la parité) de la fonction : $(f')'_k(t) = \frac{-2k}{k^2+1}\left(1-2kt^2\right)$
La fonction f_k' étant nul en zéro et de limite nulle en $+\infty$ on a donc $\sup(|f_k'|)$ atteint pour $x = \frac{1}{\sqrt{2k}}$. D'où la majoratio

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ f_k'(t) \leq \sqrt{2}e^{-1/2}\frac{\sqrt{k}}{k^2+1} \sim \frac{\sqrt{2}e{-}^{1/2}}{k^{3/2}}$$

Il y a donc convergence normale de $\sum f_k'$ sur $\mathbb{R}$ et, comme auparavant,

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2kte^{-kt^2}}{k^2+1}}$$

4.3. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ prouvée en 4.1 permet d'appliquer le théorème de limite d'une somme de série : $\lim\left(\sum f_k\right) =$ $\sum\left(\lim\left(f_k\right)\right)$. Comme chaque f_k $(k \geq 1)$ est de limite nulle en $+\infty$, on a donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right) = 0}$$

4.4. f est paire (comme les f_k), de limite nulle en l'infini, de dérivée nulle en 0 décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (dérivée négative). C'es donc une fonction positive.

4.5. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. pour prouver l'intégrabilité on peut montrer que $t^2 f(t)$ admet une limite finie en $+\infty$ (ce sera alors vrai aussi en $-\infty$ par parité)

Or sur $[0, +\infty[$ $t- > \frac{t^2e^{-kt^2}}{k^2+1}$ est dérivable de dérivée $\frac{2te^{-kt^2} - 2kt^3e^{-kt^2}}{1+k^2}$. l'étude des variations montre que le maximum est atteint en $\pm 1/\sqrt{k}$ et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \left|t^2 f_k(t)\right| \leq \frac{e^{-1}}{k\left(1+k^2\right)} \sim \frac{e^{-1}}{k^3}$$

Le majorant est indépendant de t et est le terme général d'une série convergente. $\sum t^2 f_k(t)$ est donc normalemen convergente sur $\mathbb{R}$ et on peut, de nouveau , utiliser le théorème de limite en . $t^2 f_k(t)$ étant de limite nulle en $+\infty$, o obtient que

$$\lim_{t\to\infty}\left(t^2 f(t)\right) = 0$$

4.6.

- F est, comme f, de limite nulle en $+\infty$ (question 2.5) et décroissante sur $[0, +\infty[$ (question 2.2).

- On peut même préciser :$F\prime(x) = 0 \iff f(x+1) = f(x)$. . cette égalité est impossible sur $\mathbb{R}^+$ car f est strictemen décroissante (et de même sur $\mathbb{R}^-$) . On a donc obligatoirement $x < 0$ et $x+1 > 0$. donc par parité $f(x+1) = f(x) =$ $f(x+1) = f(-x) \Rightarrow x+1 = -x$ (toujours la décroissance stricte) $\Rightarrow x = -1/2$ et donc $\boxed{F \text{ décroît sur }]-1/2, +\infty[}$

- Par ailleurs, f est paire et la question 3.2 montre que le graphe de $\boxed{F \text{ est symétrique par rapport à la droite } x = -1/2}$.
f étant décroissante (et positive) sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\forall x \geq 0,\ 0 \leq F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\, dt \leq f(x)\int_x^{x+1} dt = f(x)$$

- F est ainsi continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et dominée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. C'est donc elle même une fonctio intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par parité, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

II. L'endomorphisme θ.

1. D'après la première partie les fonctions F sont C^1.. Comme $x \mapsto |x|$ est continue et non de classe $\mathcal{C}^1$, c'est une fonctio qui n'admet pas d'antécédent par θ. θ n'est pas un endomorphisme surjectif de $\mathcal{C}^0$.

2.1. Supposons $f \in Ker(\theta)$. On a alors $F = \theta(f)$ qui est constante et donc d'après la question $I.2.3$ f est continue de périod 1. De plus, $F(0) = 0$ et donc $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$.
Réciproquement, si $f \in \mathcal{C}_1^0$ et si $\int_0^1 f = 0$ alors $F = \theta(f)$ est constante toujours la question $I.2.3.$ et cette constante vau $F(0) = \int_0^1 f(t)\, dt = 0$
On a ainsi prouvé que

$$\boxed{\text{Ker}(\theta) = \left\{f \in \mathcal{C}_1^0 /\ \int_0^1 f = 0\right\}}$$

2.2. c_k est clairement continue et 1-périodique (continuité et 2π périodicité du cosinus).

$$< c_j|c_k >= \int_0^1 \cos(2\pi jt)\cos(2\pi kt)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (\cos(2\pi(j+k)t) + \cos(2\pi(j-k)t))\ dt$$

On a toujours $j+k \neq 0$ donc $\int_0^1 \cos(2\pi(j+k)t)dt = \left[\frac{\sin(2\pi(j+k)t)}{2\pi(j+k)}\right]_0^1 = 0$ par contre

$$\int_0^1 \cos(2\pi(j-k)t)dt = \begin{cases} \left[\frac{\sin(2\pi(j-k)t)}{2\pi(j-k)}\right]_0^1 = 0 \text{ si } j \neq k \\ \int_0^1 1dt = 1 \text{ si } j = k \end{cases}$$

on a donc :

$$\forall j,k \in \mathbb{N}^*,\ < c_j|c_k >= \delta_{j,k}$$

On a $c_k \in Ker(\theta)$ car la fonction est continue 1 périodique et $\int_0^1 c_k = \left[\frac{\sin(2\pi kt)}{2\pi k}\right]_0^1 = 0$ car $k > 0$

$$Vect\left((c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\right) \subset Ker(\theta)$$

Par ailleurs, (c_k) est libre:
Soit $\sum_{k=1}^n \lambda_k c_k = 0$ une combinaison finie linéaire nulle . On a donc pour tout j

$$< c_j|\sum_{k=1}^n \lambda_k c_k >= \sum_{k=1}^n \lambda_k < c_j|c_k >= \lambda_j + \sum 0 \text{ et donc } \forall j \in [[1,n]]\ ,\lambda_j = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{Ker(\theta) \text{ est de dimension infinie}}$$

2.3.
- f étant continue, ϕ_n est la primitive de f nulle en n donc est une fonction C^1 On peut donc faire une intégratio par parties:

$$W_n = \left[\frac{\phi_n(t)}{t}\right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\ dt = \frac{\int_n^{n+1} f(t)dt}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\ dt$$

  mais f est 1-périodique et donc avec le changement de variable $t = u + n$

$$\int_n^{n+1} f(t)\ dt = \int_0^1 f(u)\ du$$

  Ce qui donne donc :

$$\boxed{W_n = \frac{\phi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\ dt}$$

- De même avec un changement de variable on a

$$\phi_n(x) = \int_n^x f(t)dt = \int_0^{x-n} f(u)\ du = \phi_0(x-n)$$

  $|\phi_0|$ est continue sur le SEGMENT $[0,1]$ et admet, sur ce segment, un maximum M. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [n, n+$
  $|\phi_n(x)| \leq M$
  On a donc

$$\left|\int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\ dt\right| \leq M\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} = \frac{M}{n(n+1)}$$

  Ainsi par majoration , $\int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\ dt$ est le terme général d'une série absolument convergente.
- Si $f \in Ker(\theta)$ alors $\phi_0(1) = 0$ et $\sum W_n$ converge.
- Sinon, W_n est somme de termes généraux de séries convergente et divergente $(\phi_0(1)/n)$. On a donc divergence d $\sum W_n$.

$$\boxed{\text{si } f \in \mathcal{C}_0^1 \text{ alors } f \in Ker(\theta) \iff \sum \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge}}$$

3.1. Si $a \neq 0$, on a

$$\theta(h_a)(x) = \int_x^{x+1} e^{at}\ dt = \frac{1}{a}(e^{a(x+1)} - e^{ax}) = \frac{e^a - 1}{a} h_a(x)$$

h_a (qui est non nul) est donc vecteur propre de θ associé à la valeur propre $\frac{e^a-1}{a}$.
Quant à $a = 0$ on a alors $h_0 = 1$, on a vu en $I.1.1$ qu'il est vecteur propre de θ associé à la valeur propre 1

3.2. La fonction $\alpha : \forall u \in \mathbb{R}^*$:$\alpha(u) = \frac{e^u-1}{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\alpha'(u) = \frac{ue^u - e^u + 1}{u^2}$$

Le dénominateur est positif strictement et la dérivée du numérateur est ue^u. le numérateur est donc décroissant strictement sur $\mathbb{R}^-$ et croissante strictement sur $\mathbb{R}^+$. Etant nulle en 0, il reste strictement positive. Ainsi, α' es strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que α croît strictement sur chaque intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{*-}$.De plus $\lim_0 (\alpha) =$ $1, \lim_{-\infty} (\alpha) = 0$ et $\lim_{+i} (\alpha) = +\infty$.*(remarque : dessinez un tableau de variation)*

3.3. D'après la question 3.1,pour tout $u \neq 0$, $\alpha(u) \in Sp\,(\theta)$. D'après les variations qui précédent, la fonction α étant continu strictement monotone sur chaque intervalle :

- quand a parcourt $\mathbb{R}^{*-}$, $\frac{e^a-1}{a}$ parcourt $]0,1[$ et donc $]0,1[\subset Sp\,(\theta)$
- quand a parcourt $\mathbb{R}^{*+}$, $\frac{e^a-1}{a}$ parcourt $]1,+\infty[$ et donc $]1,+\infty[\subset Sp\,(\theta)$
- Si $a = 0$, on a vu que $\theta(1) = 1$ et donc $1 \in Sp\,(\theta)$
- $Ker\,(\theta) \neq \{0\}$ donc $0 \in Sp\,(\theta)$

$$\boxed{Sp(\theta) \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+}$$

III. Une suite de fonctions propres.

1.1. ρ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \rho'(t) = 2t\cos(2t) - 2t = -4t\sin^2(t)$$

La fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme elle est nulle en zéro on a :

$$\boxed{\forall t > 0\ ,\ \rho(t) < 0}$$

1.2. g est dérivable sur I_k et ... g' doit s'exprimer à l'aide de ρ :comme $g(t) = t\cot an(t) + \ln(\sin(t)) - \ln(t) - \ln(\lambda)$:

$$\forall t \in I_k,\ g'(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{t}{\sin(t)^2} + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{\rho(t)}{t\sin^2(t)} < 0$$

g est donc continueà dérivée strictement négative sur I_k : . g réalise donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I_k dans son imag $g(I_k) =]\lim_{(2k+1)\pi} g, \lim_{2k\pi} g[$

- En $(2k+1)\pi$ par valeurs négatives : $g(t)$ tend vers $-\infty$ (forme du type : $(2k+1)\pi * (-\infty) + (-\infty))$)
- En $(2k\pi)^+$, on a une forme indéterminée qu'il faut préciser.:On pose $u = \sin(t)$ qui tend vers 0 :

  On a $t\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \sim (2k\pi)\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{u}$ et $\ln\left(\frac{\sin(t)}{\lambda t}\right) = \ln(\sin(t)) - \ln(t) - (\ln(\lambda) = \ln(\sin(t)) +$(limite finie)$\sim \ln(\sin(t)) = \ln(u)$

  Or $1/u >>_0 \ln(u)$ donc $\lim_{2k\pi}(g(t)) = +\infty$

$$\boxed{g(I_k) = \mathbb{R}}$$

2.1. γ étant non nul, on a

$$\int_x^{x+1} e^{\gamma t}\,dt = \frac{1}{\gamma}\left(e^{\gamma(x+1)} - e^{\gamma x}\right) = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}e^{\gamma x}$$

2.2. On a alors

$$\int_x^{x+1} e^{at}\cos(bt)\,dt = Re\left(\int_x^{x+1} e^{\gamma t}\,dt\right) = Re\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma}e^{\gamma x}\right)$$

- Si $\lambda = \frac{e^\gamma-1}{\gamma}$ $t->e^{\gamma t}$ vérifie $\theta(f) = \lambda f$ donc aussi sa partie réelle h (et sa partie imaginaire)
- Pour la réciproque on prend des valeurs de x simples : On a $h \in E_\lambda$ si et seulement si

$$\forall x,\ Re\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma}e^{\gamma x}\right) = Re\,(\lambda e^{\gamma x})$$

  - $x = 0$ donne $\mathrm{Re}\left(\frac{e^\gamma-1}{\gamma}\right) = \lambda$ (car $\lambda \in \mathbb{R}$)
  - Pour avoir la partie imaginaire on écrit $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(-iz)$. On choisit donc x tel que $e^{\gamma x} \in i\mathbb{R}$ or $\mathrm{Re}\,(e^{\gamma x}) =$ $e^{ax}\cos(bx)$. on essaye donc $x = \frac{\pi}{2b}$ et $e^{\gamma x} = ie^{ax}$

$$\mathrm{Re}(\lambda e^{\gamma x}) = 0 \text{ et } Re\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma}e^{\gamma x}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma}ie^{ax}\right)$$

  or e^{ax} est réel et donc $\mathrm{Re}\left(\frac{e^\gamma-1}{\gamma}i\right) = 0$ soit $\mathrm{Im}(\frac{e^\gamma-1}{\gamma}) = 0$

– et donc $\lambda = \frac{e^g - 1}{\gamma}$

$$\boxed{\lambda = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}}$$

3. En écrivant $\gamma = a + ib$, la condition précédente s'écrit

$$e^a \cos(b) - 1 = \lambda a \quad \text{et} \quad e^a \sin(b) = \lambda b$$

la seconde relation équivaut à $e^a = \frac{\lambda b}{\sin(b)}$ soit $a = \ln\left(\frac{\lambda b}{\sin(b)}\right)$ et $\sin(b) > 0$ donc $\exists k$, $b \in]2k\pi, (2k+1)\pi[= I_k$. Si o reporte dans la première on trouve

$$a = \ln\left(\frac{\lambda b}{\sin(b)}\right) \quad \text{et} \quad g(b) = 1/\lambda$$

D'après III.2.1 on peut trouver dans chaque I_k un unique b_k tel que $g(b_k) = 1/\lambda$. On a alors un unique a_k. Pour tou k, $f_k : t \mapsto e^{a_k t} \cos(b_k t)$ est alors vecteur propre pour θ associé à la valeur propre λ.