

calculatrices autorisées

Notations et objectifs. On note :

- \mathbb{N} : l'ensemble des nombres entiers naturels,
- \mathbb{R} : l'ensemble des nombres réels,
- \mathbb{C} : l'ensemble des nombres complexes,
- \mathcal{C}^0 : le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
- \mathcal{C}_1^0 : le sous espace vectoriel de \mathcal{C}^0 des fonctions f 1-périodiques (c'est à dire des fonctions telles que $f(x+1) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Dans tout ce problème, on désigne par θ l'application de \mathcal{C}^0 dans \mathcal{C}^0 , définie par :
pour tout $f \in \mathcal{C}^0$, $\theta(f) = F$ où F est la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x associe $\int_x^{x+1} f(t) dt$.
On admet que θ est un endomorphisme de \mathcal{C}^0 .

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction F et de l'endomorphisme θ .

Partie I Quelques propriétés de $F = \theta(f)$

I.1. Exemples.

- I.1.1. Expliciter $F(x)$, si f est définie sur \mathbb{R} par $f(t) = 1$.
- I.1.2. Expliciter $F(x)$, si f est définie sur \mathbb{R} par $f(t) = t^k$ (où k est fixé dans \mathbb{N}^*).

I.2. Variations de $F = \theta(f)$.

On désigne maintenant par f une fonction arbitraire de \mathcal{C}^0 .

- I.2.1. Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Expliciter $F'(x)$ en fonction de f et de x .
- I.2.2. Montrer que si la fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $J_{x_0} = [x_0, +\infty[$, alors la fonction F est croissante (respectivement décroissante) sur J_{x_0} .
- I.2.3. Montrer que la fonction $F = \theta(f)$ est constante sur \mathbb{R} si et seulement si f appartient à \mathcal{C}_1^0 .
- I.2.4. Expliciter $F(x)$, si f est définie sur \mathbb{R} par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

On suppose de nouveau que f désigne une fonction arbitraire de \mathcal{C}^0 .

- I.2.5. On suppose que la fonction f admet une limite L_1 en $+\infty$.
Montrer que la fonction F admet une limite L_2 (que l'on explicitera) en $+\infty$.

I.3. Propriétés du graphe de F .

Soient $f \in \mathcal{C}^0$ et $F = \theta(f)$.

On considère la fonction ψ définie sur \mathbb{R} par $\psi(u) = F\left(u - \frac{1}{2}\right) = \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} f(t) dt$.

- I.3.1. Comparer $\psi(-u)$ et $\psi(u)$, si la fonction f est impaire (respectivement paire).
- I.3.2. Quelle propriété géométrique de la représentation graphique de la fonction F peut-on déduire des résultats obtenus en **I.3.1**, si la fonction f est impaire (respectivement paire) ?

I.4. Etude d'un exemple.

Soit $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-k t^2}}{k^2+1}$, pour t réel.

- I.4.1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R} .
- I.4.2. Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?
- I.4.3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?
- I.4.4. Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction f (on ne cherchera pas à préciser $f(0)$).
- I.4.5. La fonction f est-elle intégrable sur \mathbb{R} ?
- I.4.6. Soit $F = \theta(f)$.
 - I.4.6.1. Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction F .
 - I.4.6.2. La fonction F est-elle intégrable sur \mathbb{R} ?
(on pourra comparer $F(x)$ et $f(x)$ pour x appartenant à \mathbb{R}^+).

Partie II

L'endomorphisme θ

II.1. L'endomorphisme θ est-il surjectif ?

II.2. **Sur le noyau de θ .**

On note désormais $\text{Ker}(\theta)$ le noyau de l'endomorphisme θ .

II.2.1. Montrer que : $f \in \text{Ker}(\theta) \iff \left(f \in \mathcal{C}_1^0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right)$.

II.2.2. Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}_1^0)^2$. On note $\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note c_k la fonction définie sur \mathbb{R} par $c_k(t) = \cos(2\pi kt)$.

II.2.2.1. Vérifier que c_k appartient à \mathcal{C}_1^0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et calculer $\langle c_j|c_k \rangle$ pour tout choix de $(j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

II.2.2.2. $\text{Ker}(\theta)$ est-il de dimension finie ?

II.2.3. Soit $f \in \mathcal{C}_1^0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $\phi_n(x) = \int_n^x f(t) dt$ pour $x \in [n, n+1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $W_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

II.2.3.1. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $W_n = \frac{\phi_n(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2} dt$.

II.2.3.2. Montrer qu'il existe $M = \max_{[0,1]} (|\phi_0|)$.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n, n+1], |\phi_n(x)| \leq M$

En déduire que la série $\sum \int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2} dt$ converge.

II.2.3.3. Si on suppose que f appartient à $\text{ker}(\theta)$, quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} W_n$?

Si on suppose que f n'appartient pas à $\text{ker}(\theta)$, quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} W_n$?

II.3. **Sur le spectre de θ .**

On note $\text{Sp}(\theta)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de l'endomorphisme θ .

Si a est un nombre réel fixé, on note h_a la fonction définie sur \mathbb{R} par $h_a(t) = e^{at}$.

II.3.1. Montrer que chaque h_a est un vecteur propre de l'endomorphisme θ .

II.3.2. Etudier les variations de la fonction $u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$.

II.3.3. Expliciter l'ensemble $\text{Sp}(\theta) \cap \mathbb{R}^+$.

Partie III

Une suite de fonctions propres de l'endomorphisme θ

Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme θ

On note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ qui est fixée dans toute cette partie.

On suppose $\lambda > 0$.

III.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note I_k l'intervalle $]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

On pose, pour tout t de l'intervalle I_k : $g(t) = t \left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \right) + \ln \left(\frac{\sin(t)}{\lambda t} \right)$, où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

III.1.1. Soit ρ la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $\rho(t) = t \sin(2t) - t^2 - \sin^2(t)$.

Etudier la fonction ρ sur \mathbb{R}^+ et préciser son signe.

III.1.2. Montrer que g définit une bijection de I_k sur un intervalle de \mathbb{R} à préciser.

On se propose de montrer l'existence, dans E_λ , d'une suite (non triviale) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions propres.

III.2. Soit $\gamma = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

III.2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_x^{x+1} e^{\gamma t} dt$.

III.2.2. A quelle condition nécessaire et suffisante la fonction h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $h(t) = e^{at} \cos(bt)$ est-elle un vecteur propre de l'endomorphisme θ associé à la valeur propre λ ?

III.3. En déduire une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions propres de l'endomorphisme θ .