Concours e3a 2005 Maths A MP *sujet légèrement adapté*

Partie I

1. L'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'ensemble des solutions sur I est un espace vectoriel de dimension deux. L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$.

$$\boxed{\text{Une base de solutions est donc } \{\sin, \cos\}}$$

2. Il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in I$, $g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. Les suites $(g(n\pi))_{n\in N}$ et $\left(g\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right)$ sont respectivement $((-1)^n A)$ et $((-1)^n B))$.

3. D'après le critère séquentiel les suites$(g(n\pi))$et $\left(g\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right)$ tendent vers $\lim_{+\infty}(g)$. Donc la suite $((-1)^n A)$ converge. En prenant les suites extraites des termes pairs et impairs on trouve $\lim\left((-1)^n A\right) = A = -A$. On en déduit que $A = 0$. De même $B = 0$ donc $g = 0$. Réciproquement la fonction nulle admet une limite finie.

$$\boxed{\text{la seule solution de } \mathcal{E}_0 \text{ ayat une limite finie en } +\infty \text{ est la fonction nulle}}$$

Partie II

1. Par définition V est le sous espace vectoriel engendré par $(x- > x\cos(x)), x\,(- > \cos(x)), (x- > x\sin(x)), x\,(- > \sin(x))$ qui sont des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Donc V est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

2. Il serait plus simple de vérifier que la famille précédente est libre ... mais respectons le sujet :

   - L'application qui envoie v sur h_v est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans V
   - Elle est injective. Soit $v = (a, b, c, d)$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$: $(ax + b)\cos(x) + (cx + d)\sin(x) = 0$.On choisit des valeurs de x :
     - $x = 0$ donne $b = 0$ puis $x = \pi$ donne $a = 0$
     - enfin sur $]0, \pi[$ $\sin(x) \neq 0$ donc $cx + d = 0$ le polynôme ayant une infinité de racines $c = d = 0$
   - Elle est surjective : par définition de V tout élément est l'image d'un quadruplet (a, b, c, d)
   - donc c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ sur V.L'image de la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ est une base de V.

$$\boxed{\{h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4}\} \text{ est une base de } V}$$

3. En dérivant deux fois , ou en utilisant Leibniz on obtient :

$$[(ax + b)\cos(x) + (cx + d)\sin(x)]'' = (ax + b)(-\cos(x)) + 2a(-\sin(x)) + (cx + d)(-\sin(x)) + 2c\cos(x)$$

et donc :

$$\psi(h_v) = 2c.h_{e_2} - 2a.h_{e_4}$$

   (i) ψ est linéaire par linéarité de la dérivation, et à valeurs dans V.

   (ii) $\psi(h_v) = 0 \Leftrightarrow h_v$ solution de $(\mathcal{E}_0) \Leftrightarrow h_v \in Vect(h_{e_2}, h_{e_4})$. Donc $\ker(\psi) = Vect(h_{e_2}, h_{e_4})$.Comme on a une base $\dim(\ker(\psi) = 2$ et le théorème du rang donne $rg(\psi) = 4 - 2 = 2$

   (iii) Comme $\psi(h_{e_2}) = \psi(h_{e_4}) = 0$, que $\psi(h_{e_1}) = -h_{e_2}$ et $\psi(h_{e_2}) = h_{e_4}$, la matrice de ψ dans V vaut : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Cette matrice est de rang 2, on retrouve $\dim(Im(\psi)) = rg(\psi) = 2$. L'image de ψ contient les éléments h_{e_2} et h_{e_4} non colinéaires. Donc (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base ψ.

4. $(\mathcal{E}_1)$ est une équation différentielle d'équation homogène associée $(\mathcal{E}_0)$. pour résoudre $(\mathcal{E}_1)$, il suffit de chercher une solution particulière et d'ajouter une solution générale de $(\mathcal{E}_0)$.

   On peut utiliser la méthode vue en Sup pour déterminer cette solution particulière. Il est plus simple d'utiliser ψ :

   On veut résoudre $\psi(h_v) = h_{e_2}$. On prend donc $c = 1/2$ et $a = 0$. $x \mapsto \frac{1}{2}x\sin(x)$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_1)$. On en déduit la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$:

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}x\sin x + A\cos x + B\sin x, (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

Partie III

1. 1a. $\forall t \in \mathbb{R}^+, e^{-tx} \leq 1$ on peut multiplier l'égalité par $\frac{1}{1+t^2}$ positif : $\boxed{\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}}$.

   1b. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$. D'après 1a, elle est majorée par $\frac{1}{1+t^2}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

$$\boxed{t- > F(x,t)\ dt \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$$

   si vous prenez la limite de $t^2F(x,t)$ attention à séparer $x = 0$ et $x > 0$

2. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

   - $\forall x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^0_{pm}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall\ t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - Domination : $\forall x, t \in \mathbb{R}^+, \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est indépendante de x, continue sur $\mathbb{R}^+$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (cf 1b).

$$\boxed{G \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)}$$

3a. F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composé et quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à dénominateur non nul.
On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t^2} = -tF(x,t)$

3b. $t^2 - t + 1$ est un trinôme du second degré de discriminant strictement négatif. comme le terme dominant est positif $t^2 - t + 1 > 0$ et donc $\frac{t}{1+t^2} < 1$ en divisant par $t^2 + 1 > 0$
Donc $\frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$. Si $x \geq \epsilon$, alors $\frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-\epsilon t}$.

   (i) pour $x > 0$, $t- > \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue,négative,sa valeur absolue est majorée par $t- > e^{-xt}$ intégrable sur $[0, +\infty[$ car $-x < 0$. Donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   (ii) On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous une intégrale.
   - $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction : $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.(déjà vu)
   - $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction : $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. (point précédent)
   - $\forall\ t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   - Domination sur un segment $[a,b]$ quelconque inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$: $\forall x \in [a,b], \forall t \in \mathbb{R}^+, \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\frac{te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq e^{-at}$ et la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est indépendante de x, continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   D'après le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre , la fonction G est $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et on a

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\ dt}$$

4. On a $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}$. Or $t- > \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ majorée par $t- > e^{-xt}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc $t- > \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On vérifie alors les hypothèses du théorème de dérivation deux fois sous une intégrale.

   - $\forall\ x > 0$, les fonctions $t \mapsto F(x,t)$, $t- > \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ et $t- > \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   - Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   - Domination sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$: $\forall x \in [a,b], \forall t \in \mathbb{R}^+, \left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq e^{-at}$ et la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est indépendante de x, continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

D'après le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, la fonction G est $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\ dt}$$

5. La vérification ne pose aucun problème :

$$G(x)+G''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2}+\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\right)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,dt=\left[\frac{1}{-x}e^{-xt}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ ,\ G(x)+G''(x)=\tfrac{1}{x}}$$

Donc G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

6a. Pour tout $x>0$, $G'(x)\leq 0$. Donc G est une application décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, et par décroissance et continuité en 0 $G(0)=\lim_{x->0}(G)\leq G(x)$

$$\boxed{G \text{ décroît sur } \mathbb{R}^{+}}$$

6b. Pour $x>0$: comme $\frac{1}{1+t^2}\leq 1$, on a $0\leq G(x)\leq\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,dt=\frac{1}{x}$. Donc $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{+\infty}(G)=0}$$

Partie IV

1. On utilise le critère spécial des série alternées :
   - $(-1)^n f(u_n)$ est de signe alterné car f est à valeurs positives
   - la suite $|(-1)^n f(u_n)|$ est décroissante par composition d'une suite croissante et d'une fonction décroissante.
   - la suite $|(-1)^n f(u_n)|$ converge vers 0 par composition des limites : $\lim(u_n)=+\infty$ et $\lim_{+\infty}(f)=0$

$$\boxed{\sum(-1)^n f(n) \text{ est une série convergente}}$$

2. On a $\sin(t)f(t)\sim_0 tf(t)$ qui admet une limite d'après l'hypothèse d) sur f.

   La fonction $|\sin(t)|\,f(t)$, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, est prolongeable par continuité en 0 et la fonction ainsi prolongée est bien continue sur tout segment $[0,x]$

3. 3a. Sur le segment $[n\pi,(n+1)\pi]$, f décroît et $|\sin(t)|>0$, d'où l'encadrement :

$$|\sin(t)|\,f((n+1)\pi)\leq|\sin(t)|\,f(t)\leq|\sin(t)|\,f(n\pi).$$

   Les fonctions étant continue sur segment on peut intégrer et comme on a le calcul en posant $t=u+n\pi$: $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t)|\ dt=\int_0^{\pi}|\sin(t)|\ dt\int_0^{\pi}\sin(t)\ dt=2$

$$\boxed{2f((n+1)\pi)\leq w_n\leq 2f(n\pi)}$$

   3b. Comme $2f$ est une fonction continue sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires une valeur $u_n\in[n\pi,(n+1)\pi]$ tel que $w_n=2f(u_n)$.

   3c. Sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, $\sin(t)$ est du signe de $(-1)^n$ donc $|\sin(t)|=(-1)^n\sin(t)$ donc $w_n=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin(t)\ dt$.

4.

   4a.

$$\begin{aligned}\int_0^{2(n+1)\pi}\sin(t)f(t)dt-\int_0^{2n\pi}\sin(t)f(t)dt &= \int_{2n\pi}^{2(n+)\pi}\sin(t)f(t)dt=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin(t)f(t)\ dt+\int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi}\sin(t)f(t)\ dt\\ &= w_{2n}-w_{2n+1}=2\left(f(u_{2n)}-f(u_{2n+1)})\right)\geq 0 \text{ car } f \text{ décroît}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{la suite }\left(\int_0^{2n\pi}\sin(t)f(t)dt\right)\text{ croît}}$$

   4b. De même, $\boxed{\left(\int_0^{(2n+1)\pi}\sin(t)f(t)dt\right)\text{ est décroît}}$

   4c. finissons de montrer que les deux suites sont adjacentes :
   $\left|\int_0^{(2n+1)\pi}\sin(t)f(t)dt-\int_0^{2n\pi}\sin(t)f(t)dt\right|=w_{2n}=2f(u_{2n})$. Comme $\lim_{+\infty}f=0$ et que $\lim(u_{2n})=+\infty$, $\lim\left(\left|\int_0^{(2n+1)\pi}\sin(t)f(\right.\right.$
   0

   Les deux suites (p_n) et (q_n) sont donc adjacentes. Elles convergent vers une limite commune notée l.

5. Soit $y \geq 0$. On pose $n = E(y/\pi)$. . On a donc $\lim_{y->+\infty}(n) = +\infty$
Alors $I_f(0,y) = \int_0^{n\pi} \sin(t)f(t)\ dt + \int_{n\pi}^{y} \sin(t)f(t)\ dt$.
Dans cette somme, le premier terme tend vers l quand y tend vers $+\infty$ par composition
et le second tend vers 0 car : $\left|\int_{n\pi}^{y} \sin(t)\ f(t)\ dt\right| \leq \int_{n\pi}^{y} |\sin(t)|\ f(t)\ dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\, f(t)\ dt = w_n$.
Donc, $I_f(0,y)$ tend vers l quand y tend vers $+\infty$.

remarque : la limite vers l d'une suite ne suffit pas en général à prouver celle de la fonction.

6 On vérifie sans problème que $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ vérifie toutes les hypothèses de la partie IV

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge}}$$

Partie V

1. vérifications sans problème : Le "on peut donc définir" découle des questions IV 2 qui prouve la convergence absolue de l'intégrale impropre $\int_0^x f(t)\sin(t)dt$ par prolongement par continuité et IV 6 qui prouve le convergence de l'intégrale impropre $\int_0^x f(t)\sin(t)dt$

2. Le changement de variables $u = t + x$ est immédiat car on peut faire un changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif dans une intégrale impropre qui converge.

3. On écrit $\sin(t-x) = \sin(t)\cos(x) - \sin(x)\cos(t)$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ dt = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt$$

sous réserve de convergence de la troisième intégrale (les deux autres sont déjà connues) . Or :

- pour $\sin(x) \neq 0$ $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt = \frac{1}{\sin(x)}\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ dt - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$ combinaison linéaire d'intégrales impropres qui convergent donc intégrale impropre qui converge.
- pour $\sin(x) = 0$ on écrit $[x, +\infty[\ \subset [x_0, +\infty[$ avec $\sin(x_0) \neq 0$. On a convergence de l'intégrale impropre sur $[x_0, +\infty[$ donc aussi sur $[x, +\infty[$

Comme $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$ on a fait apparaître une primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui est y donc dérivable et on peut donc dériver : $\frac{d}{dx}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt\right) = -\frac{\sin(x)}{x}$

et de même $\frac{d}{dx}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt\right) = -\frac{\cos(x)}{x}$

H est donc dérivable par somme et produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} H'(x) &= (\cos(x))\left(-\frac{\sin(x)}{x}\right) - (\sin(x))\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt - \left((\sin(x))\left(-\frac{\cos(x)}{x}\right) + (\cos(x))\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt\right) \\ &= -(\sin(x))\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt - (\cos(x))\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt \end{aligned}$$

H' est donc aussi dérivable et

$$\begin{aligned} H"(x) &= -(\sin(x))\left(-\frac{\sin(x)}{x}\right) - (\cos(x))\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt - \left((\cos(x))\left(-\frac{\cos(x)}{x}\right) - (\sin(x))\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt\right) \\ &= -H(x) + \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{x} = -H(x) + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On a bien vérifié :

$$\boxed{H(x) + H"(x) = \frac{1}{x}}$$

4. On reprend l'expression :

$$H(x) == -\sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt - \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt$$

Par convergence des intégrales impropres $\lim_{x->+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt\right) = 0$ et $\lim_{x->+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\ dt\right) = 0$. Comme on multiplie par des quantité bornées :

$$\boxed{\lim_{+\infty}(H) = 0}$$

5. La fonction $H - G$ est donc une solution de l'équation $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui a une limite nulle en $+\infty$. D'après la première partie, c'est la fonction nulle. Donc :

$$\boxed{G = H \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}}$$