CCP 2006 PC épreuve 1

PARTIE I

I.1. Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i=1}^n$ une base orthonormale de E .Si on note $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i u_i$ on a $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Comme les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a, avec l'identification usuelle d'un réel a avec la matrice (a):

$$\boxed{(x|y) = {}^tXY = {}^tYX}$$

.

I.2. a)formule du cours :

$$\boxed{p(z) = \sum_{i=1}^k (z|e_i)e_i}.$$

b) i) L'égalité précédente s'écrit matriciellement $M(p)Z = \sum_{i=1}^k {}^tE_i Z E_i$. Comme E_i et Z sont des matrices colonnes , on peut utiliser la question **I1. :**

$$\boxed{M(p)Z = \sum_{i=1}^k E_i\, {}^tE_i Z}$$

.

b) ii) $M(p)$ et $\sum_{i=1}^k E_i\, {}^tE_i$ sont donc deux matrices de la projection orthogonale. Par unicité de la matrice d'un endomorphisme dans une base fixée on a :

$$\boxed{M(p) = \sum_{i=1}^k E_i\, {}^tE_i}$$

.

c) de nouveau une question de cours : $||z||^2 = ||(z - p(z)) + p(z)||^2 = ||z - p(z)||^2 + ||p(z)||^2$ (d'après Pythagore, car p est un projecteur orthogonal), d'où

$$\boxed{||p(z)|| \leqslant ||z||}$$

I.3. a) On vérifie sans problème que $M^2 = M$, donc on a la matrice d'un projecteur noté f . La matrice de f dans la base canonique, (qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique) , est symétrique, donc f est symétrique et donc on a une projecteur symétrique donc

$$\boxed{f \text{ est un projecteur orthogonal}}.$$

b) Une base de l'image est obtenu en extrayant une base des colonnes de M : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de l'image.

La matrice est de rang 2 ; le noyau est donc de dimension 2 Un calcul rapide donne alors une base du noyau (ou on devine les deux vecteurs) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les deux vecteurs de base de l'image (du noyau) sont orthogonaux . il suffit de les normés.

$$\boxed{\text{base de Im}(f)\text{:} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ base de Ker}(f) : \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

I.4. a)

- λ est une valeur propre non nul donc $u \in \text{Im}(p \circ r) \subset \text{Im}(p) = H$:

$$\boxed{u \in H}$$

ou recalculer $u = p(v)$ *avec* $v = r(u)/\lambda$

- D'autre part, $p(r(u) - \lambda u) = p(r(u)) - \lambda p(u) = \lambda(u - p(u))$. p étant une projection sur H , tout vecteur de H est invariant par p on a donc $p(r(u) - \lambda u) = 0$. Ainsi, $r(u) - \lambda u$ est élément de $\text{Ker}(p) = \text{Im}(p)^{\perp}$, car p est un projecteur orthogonal:

$$\boxed{r(u) - \lambda u \in H^{\perp}}$$

b)

- D'après la question précédente, $(u|r(u) - \lambda u) = 0$ donc $(u|r(u)) = \lambda ||u||^2$.
- D'autre part l'endomorphisme r est symétrique donc : $||r(u)||^2 = (r(u)|r(u)) = (u|r^2(u)) = ((u|r(u))$ car $r^2 = r$

d'où

$$\boxed{\lambda ||u^2|| = ||r(u)||^2}$$

.

c) D'après **I.2.c)**., $||r(u)|| \leqslant ||u||$. Comme $||u|| \neq 0$ (un vecteur propre est non nul), $\lambda = \dfrac{||r(u)||^2}{||u||^2} \in [0,1]$.
Toutes les valeurs propres non nulles sont dans $[0,1]$.Mais $0 \in [0,1]$ donc :

$$\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } p \circ r \text{ sont éléments de } [0,1]}$$

.

I.5. a)

- $p \circ r$ est linéaire
- $(p \circ r)^2 = p^2 \circ r^2 = p \circ r$: $p \circ r$ car $p \circ q = q \circ p$

en utilisant la symétrie de p et q on a pour tous vecteurs de F : $(p(r(x))|y) = (r(x))|p(y)) = (x|r(p(y))$ et donc comme r et p commutent, $(p(r(x))|y) = (x|p(r(y))$: $p \circ r$ est symétrique.

$$\boxed{p \circ r \text{ est un projecteur orthogonal}}$$

b)

- $p \circ r$ étant un projecteur son spectre est inclus dans $\{0, 1\}$.
- $p \circ r$ étant diagonalisable non nul 0 n'est pas la seule valeur propre donc le spectre contient 1.
- $H = \text{Im}(p)$ est strictement inclus dans F , donc on a aussi $\text{Im}(p \circ r)$ strictement inclus dans F .p est diagonalisable et n'est pas l'identité donc 1 n'est pas la seule valeur propre. Le spectre contient 1.

$$\boxed{Sp(p \circ r) = \{0, 1\}}$$

c) par doubles inclusions :

- Soit $x \in \text{Ker}(p \circ r)$: on a la décomposition "évidente" $x = r(x) + (x - r(x))$ avec $r(x) \in \text{Ker}(p)$ par hypothèse sur x et $x - r(x) \in \text{Ker}(r)$, car $r^2 = r$
- Soit $x \in \text{Ker}(p) + \text{Ker}(r)$: on peut écrire $x = y + z$ avec $p(y) = 0$ et $r(z) = 0$. Alors $p(r(x)) = p(r(y)) + p(r(z)) = p(r(y)) = r(p(y)) = 0$ (car p et r commutent).

$$\boxed{\text{Ker}(p \circ r) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(r)}$$

- Soit $x \in \mathrm{Im}(p \circ r)$ et y tel que $p(r(y)) = x$: on voit que $x \in \mathrm{Im}(p)$. p et r commutant, $x = r(p(y)) \in \mathrm{Im}(r)$.

- Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$. Alors (projecteurs) $p(x) = r(x) = x$ et donc $x = p(r(x)) \in \mathrm{Im}(p \circ r)$

$$\boxed{\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)}.$$

I.6. a)

- $R^2 = R$; en calculant ce carré par bloc on obtient $R^2 = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. On en déduit

$$\boxed{A^2 + BC = A,\ AB + BD = B \text{ et } CB + D^2 = D}$$

- R étant la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée, elle est symétrique, d'où $\boxed{{}^tA = A,\ {}^tB = C \text{ et } {}^tD = D}$.

  b) En calculant les produits par bloc: $PR = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

- *i) ⇒ ii)* : On a $\det(PR - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_k)(-\lambda)^{n-k}$. le spectre de A est donc inclus dans $\{0, 1\}$. De plus, A est symétrique réelle donc diagonalisable. Donc $A^2 = A$ et donc comme $A^2 + BC = A$, $BC = 0$ et comme ${}^tB = C$: . ${}^tCC = 0$.

- *ii) ⇒ iii)* : $Tr({}^tMM)$ est la norme canonique sur un espace de matrice (ou refaire le calcul pour vérifier que $Tr({}^tCC)$ est la somme des carrés des coefficients de C). Cette somme étant nulle, tous les termes sont nuls et $C = 0$.

- *iii) ⇒ iv)* : Si $C = 0$, $B = {}^tC = 0$ et le calcul par bloc montre que $PR = RP$, donc p et r commutent.

- *iv) ⇒ i)* : Si $p \circ r = 0$, c'est **I.5.b.**)

PARTIE II

II.1. Soit p la projection orthogonale sur l'image de f et $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = p(v)$ (qui existe car $p(v)$ est dans l'image)
On a, pour tout x de E: $||f(x) - v||^2 = ||(f(x) - f(x_0)) + (f(x_0) - v)||^2 = ||f(x) - f(x_0)||^2 + ||f(x_0) - v||^2$ d'après Pythagore puisque $f(x) - f(x_0) \in \mathrm{Im}(f)$ et $f(x_0) - v = p(v) - v \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$
On a donc bien $||f(x) - v||^2 \geqslant ||f(x_0) - v||^2$. De plus ce minorant est atteint en prenant $x = x_0$ .Enfin la fonction $\sqrt{\ }$ étant strictement croissante :

$$\boxed{\exists x_0 \in E\ ,\ ||f(x_0) - v|| = \min\{||f(x) - v||, x \in E\}}$$

II.2. Soit x_1 est une autre pseudo-solution on a en prenant $x = x_1$: $||f(x_1) - v||^2 = ||f(x_1) - f(x_0)||^2 + ||f(x_0) - v||^2$ et donc comme $||f(x_0) - v|| = ||f(x_1) - v||$ (définition de x_1) $||f(x_1) - f(x_0)|| = 0$, donc $f(x_1) = f(x_0)$or f est injective.

$$\boxed{\text{si } f \text{ est injective la pseudo solution est unique}}$$

remarque : on ne sait pas à priori que toute solution est un antécédent de $p(v)$.
II.3. D'après la question précédente, toutes les pseudo-solutions ont même image par f : $p(v)$

- Si x_0 est une pseudo-solution de $(*)$, $f(x_0) = p(v)$ et donc $f(x_0) - v \in \mathrm{Im}(f)^\perp$, et donc : $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$.

- Si, pour tout $x \in E$, $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$:$f(x_0) \in \mathrm{Im}(f)$ et $f(x_0) - v$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$; donc $f(x_0) = p(v)$ et donc x_0 est une pseudo solution, d'après **II.1)**

II.4.

- L'équation s'écrit matriciellement: pour toute matrice colonne X à $dim(E)$ lignes, ${}^t(AX)(AX_0 - V) = 0$, soit ${}^tX\,{}^tAAX_0 = {}^tX\,{}^tAV$.

  Or si on a deux matrices U et V telles que pour tout X : ${}^tXU = {}^tXV$, on a ${}^tUX = {}^tVX$. ${}^tU$ et ${}^tV$ représentent la même application linéaire donc sont égales. ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.

- Réciproquement, si ${}^tAAX_0 = {}^tAV$ on multiplie par ${}^tX$ pour obtenir l'équation de II.3., ce qui entraîne que x_0 est pseudo-solution de $(*)$.
  On a donc:
  $$\boxed{x_0 \text{ est pseudo-solution de } (*) \iff {}^tAAX_0 = {}^tAV}$$
  .

II.5. En notant $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on obtient le système

$$\begin{cases} 3a - 3c &= 2 \\ 6b &= 3 \\ -3a + 3c &= 0 \end{cases}$$

donc $\boxed{\text{les triplets } (a,b,c) \text{ convenant sont ceux de la forme } (a, \frac{1}{2}, a), a \in \mathbb{R}}$.

II.6.a) En posant pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$: $f(\lambda,\mu) = \lambda a + \mu b$ le problème est de minimiser $||f(\lambda,\mu) - c||^2$, soit encore à déterminer les pseudo-solutions de $f(\lambda,\mu) = c$ car f est linéaire et la fonction racine carrée est strictement croissante

$$\boxed{v = c \text{ et la matrice de } f \text{ dans les bases canoniques est } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}}$$

b) D'après le théorème du rang f est injective si, et seulement si, elle est de rang 2,. $\boxed{f \text{ est injective ssi } a \text{ et } b \text{ ne sont pas colinéaires}}$.
c) L'équation matricielle de II.4. devient:

$$\begin{pmatrix} ||a||^2 & (a|b) \\ (a|b) & ||b||^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant du système est $|a||^2||b||^2 - (a|b)^2$. Il est nul ssi a et b sont liés (cas d'égalité de Cauchy Schwarz) . La méthode de Cramer donne alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda &= \frac{||b||^2(a|c) - (a|b)(b|c)}{||a||^2||b||^2 - (a|b)^2} \\ \mu &= \frac{||a||^2(b|c) - (a|b)(a|c)}{||a||^2||b||^2 - (a|b)^2} \end{aligned}}$$

PARTIE III

III.1. a) Comme dans la partie précédente Soit p la projection orthogonale sur l'image de f .
On cherche donc $x \in \text{Ker}(f)^\perp$ tel que $f(x) = p(y)$, donc x tel que $f(x) = f(x_0)$. On cherche donc $x \in \text{Ker}(f)^\perp$ tel que $(x - x_0) \in \text{Ker}(f)$. C'est encore une projection orthogonal.
On prend y' la projection orthogonal de x sur $\text{Im}(f)^\perp$ et x celle de x_0 sur $\text{Ker}(f)^\perp$.

$$\boxed{y = f(x) + y' \text{ avec } (x, y') \in (\text{Ker}(f))^\perp \times (\text{Im}(f))^\perp}$$

b) Soient (x_1, y_1') et (x_2, y_2') deux solutions. Alors $f(x_1 - x_2) = y_2' - y_1' \in \text{Im}(f) \cap (\text{Im}(f))^\perp$. et donc $y_2' - y_1' = f(x_1 - x_2) = 0$, donc $x_1 - x_2 \in \text{Ker}(f)$ or $x_1 - x_2 \in (\text{Ker}(f))^\perp$, donc $x_1 - x_2 = 0$

$$\boxed{\text{la décomposition est unique}}$$

ne pas aller trop vite:x_0 n'est pas unique
c) Soient x et y dans F et λ dans $\mathbb{R}$. On a par définition de g : $x = f(g(x)) + x'$ et $y = f(g(y)) + y'$,$x + \lambda y = f(g(x + \lambda y)) + Y'$ les deux premières relations donnent par linéarité de f : $x + \lambda y = f(g(x) + \lambda g(y)) + ax' + by' = f(g(x) + \lambda g(y)) + y"$ avec $g(x) + \lambda g(y) \in (\text{Ker}(f))^\perp, g(x + \lambda y) \in (\text{Ker}(f))^\perp$ et$Y' \in (\text{Im}(f))^\perp$ $y" \in (\text{Im}(f))^\perp$, d'où par unicité de la décomposition de $ax + by$: $g(ax + by) = ag(x) + bg(y)$ donc

$$\boxed{g \text{ est linéaire}}$$

III.2.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$: $x = f(g(x)) + x' = x' \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$ donc $\mathrm{Ker}(g) \subset (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$
- Soit $x \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$: $x = f(g(x)) + x'$ avec $x' \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$, mais on a également $x = f(0) + x$ avec $(0, x) \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp} \times (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. D'après l'unicité de la décomposition , $g(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}}$$

- Par définition, $\mathrm{Im}(g) \subset (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.
- Soit $x \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$ on a $f(x) = f(x) + \overrightarrow{0}$ avec $x \in \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$ et $\overrightarrow{0} \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ et donc x est l'image par g de $f(x)$.
- On a l'autre inclusion par égalité des dimensions : d'après le théorème du rang et la dimension de l'orthogonal :

$$\boxed{\mathrm{Im}(g) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}}$$

III.3. a)

- On vient de voir que $\forall x \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}\ g \circ f(x) = x$.
- De plus si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(x) = \overrightarrow{0}$ donc $g \circ f(x) = \overrightarrow{0}$:

$$\boxed{g \circ f \text{ est le projecteur orthogonal de } E \text{ sur } (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}}$$

b)

- Pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$ on a par définition $y = f(g(y)) + y'$, avec $y' \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Donc $y' = y - f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ donc $y' = 0$ et $f \circ g(y) = y$
- pour tout $y \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ on a $y = f(\overrightarrow{0})$ avec $\overrightarrow{0} \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$ et $y \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$ donc $g(y) = \overrightarrow{0}$ et donc $f \circ g(y) = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{f \circ g \text{ est le projecteur orthogonal de } F \text{ sur } \mathrm{Im}(f)}.$$

III.4. Soit B la matrice de g dans les bases canoniques on a $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ $B = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

- f étant surjective, $(\mathrm{Im}(f))^{\perp} = 0$, donc, pour tout $y \in F$, $y = f(g(y))$. On a donc $AB = I_2$.
- $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\, u$ avec $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La projection orthogonale de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur $(\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$ est donc : $v - (u|v)u$. Ce qui donne $BA = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- On développe les deux produits qui donne un système à résoudre : $\boxed{B = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

III.5. a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$. Soit $z \in E$ tel que $y = f(z)$. Alors $(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0|z) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)^{\perp}$. Comme $\dim((\mathrm{Im}(f))^{\perp}) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$ donc $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$
On a donc $(\mathrm{Ker}(f))^{\perp} = ((\mathrm{Im}(f))^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$ car . E est de dimension finie,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}, \mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}}$$

On a donc $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\mathrm{Ker}(f))^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$
b) Soit u un vecteur propre de f et a la valeur propre associée . On a $f(u) = \lambda u$

- si $a \neq 0$: alors $g(u) = g\left\{\dfrac{f(u)}{a}\right\} = \dfrac{1}{a} g \circ f(u)$ .Or d'après la question précédente $g \circ f$ est une projection sur $\mathrm{Im}(f)$ qui contient $u = \dfrac{f(u)}{a}$ donc $g(u) = \dfrac{u}{a}$ avec $min onnul$.

- si $a=0$ alors $u\in \mathrm{Ker}(f)=(\mathrm{Im}(f))^{\perp}=\mathrm{Ker}(g)$ (cf **III.2**) et donc $g(u)=\overrightarrow{0}$ avec $u\neq\overrightarrow{0}$ et donc u est vecteur propre de g .

$$\boxed{\text{tout vecteur propre de } f \text{ est vecteur propre de } g}$$

- **c)** f étant symétrique, E possède une base orthonormée de vecteurs propres de f. Comme ce sont aussi des vecteurs propres de g, g est diagonalisable en base orthonormée donc

$$\boxed{g \text{ est symétrique}}$$

III.6. D'après la question précédente il suffit de diagonaliser A avec des matrices de passage orthogonales: en changeant les valeurs propres non nulles en leurs inverses on obtiendra la matrice B cherchée.
Le polynôme caractéristique de A est X^3-9X^2+18X, les valeurs propres de A sont donc 0, 3 et 6. On trouve alors, avec $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}\in O_3(\mathbb{R})$: $A=P\mathrm{diag}(0,3,6)P^{-1}$, d'où $B=P\,\mathrm{diag}(0,1/3,1/6)\,P^{-1}$ soit: $\boxed{B=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}}$.