RACINES CARREES DE MATRICES

Notations.

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :
$M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles de taille n.
$M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne.
$GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.
I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.
Id l'application identité de $\mathbb{R}^n$.
Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée.
$S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.
$S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est à dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.
Si $x_1, \dots, x_n$ sont des réels, on note $diag(x_1, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, \dots, x_n$ dans cet ordre.
Si p est un entier naturel non nul, on notera $\|.\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^p$
Si $x = (x_1, \dots, x_p)$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.
Si $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, on note $B_\infty(a, r)$ la boule ouverte de centre a de rayon r pour la norme $\|.\|_\infty$.

Objectifs.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrées de A si $R^2 = A$.
On note $Rac(A)$ l'ensemble des racine carrées de A, c'est à dire $Rac(A) = \{R \in M_n(\mathbb{R}) /\ R^2 = A\}$

Le problème propose de déterminer les racines carrée de A dans différents exemples, (on pourra constater qu'une matrice peut parfois admettre une infinité de racines) et étudier quelques propriétés topologiques de $Rac(A)$.
Les trois parties du problème sont **indépendantes.**
Les trois premiers exemples de la partie I sont tous **indépendants**.

I. Détermination de $Rac(A)$ dans quelques exemples.

Exemple 1 : cas où A possède n valeurs propres distinctes.

On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda$ puis montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

2. Racines carrées de D.
   Soit S une racine carrées de D.

   a. Montrer que $DS = SD$.
   b. En déduire que la matrice S est diagonale.
   c. On note alors $S = diag(s_1, \dots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, \dots, n\}$?
   d. Que peut-on dire de $Rac(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative ?
   e. Si on suppose toutes les valeurs propres de A positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

3. Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).

   Application : Ecrire toutes les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ On donnera explicitement les coefficients des solutions trouvées.

Exemple 2 : cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

Dans cet exemple, on cherche à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.
Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une racine carrée de la matrice nulle.

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f.

   a. Comparer $Im(f)$ et $Ker(f)$ puis montrer que $r \leq \frac{n}{2}$.

   b. On suppose f non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $Im(f)$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$ pour former une base de $Ker(f)$. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note u_i le vecteur tel que $f(u_i) = e_i$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On notera M_r cette matrice.

6. a. Ecrire toutes les racines carrées dans $M_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle à l'aide de M_r et d'une matrice inversible P .

   b. Application : déterminer dans $M_4(\mathbb{R})$, les racines carrées de la matrice nulle. (On ne cherchera pas à calculer explicitement les coefficients de R)

Exemple 3 : cas où $A = I_n$.

7. Soit R une racine carrée de l'unité I_n.

   a. Vérifier que R est une matrice inversible.

   b. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.

8. Déterminer $Rac(I_n)$. en s'inspirant de la question 6a.

Exemple 4 : cas où A est une matrice symétrique réelle.
Dans cet exemple, toutes les matrices que l'on considérera appartiennent à $M_n(\mathbb{R})$.

9. Une matrice symétrique admet-elle nécessairement une racine carrée ?

10. Montrer qu'une matrice symétrique positive admet au moins une racine carrée qui est elle même symétrique et positive.

II. Etude topologique de $Rac(A)$.

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui a pour coefficients $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit une norme en posant $N(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de cette norme N.

11. Fermeture de $Rac(A)$.
    Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Rac(A)$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

12. Etude du caractère borné de $Rac(I_n)$.

   – a. un exemple instructif :
   Pour tout entier naturel q on pose $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$; calculer S_q . $Rac(I_2)$ est-elle une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$

   b. $Rac(I_n)$ est-elle une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$?

   c. Application : pour cette question, $n \geq 2$.
   Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|.\|$ “surmultiplicative” sur $GL_n(\mathbb{R})$, c'est à dire vérifiant pour tous A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \geq \|A\|.\|B\|$.

III. Zéros de fonctions polynômiales. Application à la déterminatio de l'intérieur de $Rac(A)$.

Soit p un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie $\|.\|_\infty$.
On note Γ_p l'ensemble des **fonctions polynômiales** sur $\mathbb{R}^p$ c'est à dire : si $P \in \Gamma_p$, il existe N entier naturel et une famille de réels $\{a_{i_1,\ldots,i_p},\ 0 \le i_1,\ldots,i_p \le N\}$ tels que

$$\forall (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p,\ P(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{0 \le i_1,\ldots,i_p \le N} a_{i_1,\ldots,i_p} x^{i_1} \ldots x^{i_p}$$

Par exemple si $p = 3$, $P(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 3x_1x_2x_3 + 4x_2^5$ est une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^3$.
Si $p = 1$, Γ_1 est l'ensemble des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$.
Enfin, si $p \in \Gamma_p$, on pose $Z(P) = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p / \ P(x_1,\ldots,x_p) = 0\}$ ($Z(P)$ est **l'ensemble des zéros de la fonction polynômiale** P).
Si - est une partie de $\mathbb{R}^p$, un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ est un point intérieur à - s'il existe un nombre réel r strictement positif tel que $B_\infty(a,r) \subset$ - . L'intérieur d'une partie est l'ensemble de ses points intérieurs.

L'objectif de cette partie est d'étudier l'intérieur de $Z(P)$, afin de déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.

13. Questions préliminaires :

    a. Si - est un ouvert de E quel est l'intérieur de - ?

    b. Soit $a = (a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$. Montrer que $B_\infty(a,r)$ peut s'écrire comme produit de p intervalles.

    c. Soit F une partie d'intérieur vide . Montrer que tout sous ensemble de F est d'intérieur vide

14. Exemples d'ensembles de zéros de fonctions polynômiale.

    a. Dans cette question, $p = 1$. Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$. Dans quel cas $Z(P)$ est-il infini ?

    b. Dans cette question, $p = 2$. On considère $P(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2 - 1$ et $Q(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2$. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $Z(P)$ et $Z(Q)$. $Z(P)$ et $Z(Q)$ sont-il infinis ?

15. Intérieur de l'ensemble des zéros d'une fonction polynômiale.
    Soit $P \in \Gamma_p$.

    a. Soient $I_1,\ldots,I_p$ des parties infinies de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que si la fonction polynômiale P s'annule sur $I_1 \times \ldots \times I_p$, alors P est la fonction nulle.

    b. En déduire que si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, P est la fonction nulle.

    c. Si l'on suppose que P n'est pas la fonction nulle, que vaut l'intérieur de $Z(P)$?

16. Application à l'étude de l'intérieur de $Rac(A)$.
    Dans cette question, on confondra les espaces vectoriels $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$. Par exemple, on prendra la liberté d'écrire que pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, sans se soucier de l'ordre des termes.
    Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

    a. Ecrire $Rac(A)$ sous forme d'un ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ puis montrer qu'il existe des éléments $P_1,\ldots,P_{n^2}$ de Γ_{n^2} tels que $Rac(A) = \bigcap_{l=1}^{n^2} Z(P_l)$.

    b. Déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.