Partie I

I.A.1) Si $A \in O_3(\mathbb{R})$ on a ${}^tA\,A = I_3$ et donc $\sqrt{Tr({}^tA\,A)} = \sqrt{3}$.

$$\boxed{A \in O_3(\mathbb{R}) \Longrightarrow \|A\| = \sqrt{3}}$$

I.A.2) On a donc pour toute matrice $A \in O_3(\mathbb{R})$: $\|0 - A\| = \sqrt{3}$. le minimum des normes est donc $\sqrt{3}$.

$$\boxed{d\left(0, O_3\left(\mathbb{R}\right)\right) = \sqrt{3}}$$

I.A.3) $I_3 \in O_3\left(\mathbb{R}\right)$, donc $0 = \|I_3 - I_3\| = \inf\left(\|I_3 - M\|, M \in O_3\left(\mathbb{R}\right)\right)$
I.B)

- $O_3(\mathbb{R})$ est borné car $\forall A \in O_3(\mathbb{R}), \|A\| = \sqrt{3}$.
- L'application $g : M \longmapsto {}^tM\,M$ est bilinéaire donc continue de $M_3(\mathbb{R})$ dans lui même. Le singleton $\{I_3\}$ est fermé . Et donc Donc $O_3(\mathbb{R}) = g^{-1}\left(\{I_3\}\right)$ est fermé.
- $O_3(\mathbb{R})$ est fermé et borné donc compact.

$$\boxed{O_3(\mathbb{R}) \text{ est compact}}$$

.

I.C) On sait que pour toutes matrices M, N ,$|\,\|M\| - \|N\|\,| \leq \|M - N\|$.L'application $M \longmapsto \|M\|$ est donc 1-lipschitzienne donc continue sur $\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ et est à valeur réelle.

$$\boxed{\|\ \| \in C^0\left(\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right), \mathbb{R}\right)}$$

I.D) L'application $M \longmapsto \|A - M\|$ est continue d'après la question précédente.. L'image du compact $O_3(\mathbb{R})$ en un compact de $\mathbb{R}$. Elle admet donc un plus petit élément $\|A - U\|$

$$\boxed{\exists U \in O_3(\mathbb{R})\ ,\ \|A - U\| = d(A, O_3(\mathbb{R}))}$$

I.E.1) Pour toute matrice $U \in O_3\left(\mathbb{R}\right)$, on a

$$d\left(M, O_3\left(\mathbb{R}\right)\right) \leq \|M - U\| \leq \|M - N\| + \|N - U\| = \|N - U\| + \|N - M\|$$

D'après laquestion **D** on peut choisir U telle que $\|N - U\| = d(N, U)$
. $d\left(M, O_3\left(\mathbb{R}\right)\right) - \|M - N\| \leq\ d(N, O_3(\mathbb{R}))$ donc

$$\boxed{d\left(M, O_3\left(\mathbb{R}\right)\right) - d(N, O_3(\mathbb{R})) \leq\ \|M - N\|}$$

I.E.2) Par symétrie on a

$$\left|d\left(M, O_3\left(\mathbb{R}\right)\right) - d(N, O_3(\mathbb{R}))\right| \leq\ \|M - N\|$$

on a donc

$$\|\Phi(M) - \Phi(N)\| \leq \|M - N\|$$

Φ est 1-lipschitzienne donc continue.

$$\boxed{\Phi \in C^0\left(\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right), \mathbb{R}\right)}$$

I.F.1) p est linéaire donc continue , et la norme est continue, donc par composition $\theta \in C^0\left(\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right), \mathbb{R}\right)$
I.F.2) $O_3(\mathbb{R})$ est compact donc son image par θ est un compact de $\mathbb{R}$ et admet donc un plus petit élément. On note U la matrice de $O_3(\mathbb{R})$ qui rend θ minimum.
I.F.3) p est une projection orthogonale. On a donc pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\|M - P(M)\| = \inf\left(\|M - N\|, N \in P\right)$
Soit alors $M \in O_3(\mathbb{R})$ et $N \in P$ on a

$$\|M - N\| \geq \|M - P(M)\| \geq \|U - p(U)\|$$

Ce qui prouve que $\|U - p(U)\|$ minore $\{\|M - N\|, M \in O_3(\mathbb{R}), N \in P\}$. Comme $U \in O_3(\mathbb{R})$ et $p(U) \in P$, $\|U - p(U)\|$ est un élément de l'ensemble.

$$\boxed{\exists U \in O_3(\mathbb{R}), \|U - p(U)\| = d\left(P, O_3(\mathbb{R})\right)}$$

I.F.4).$0 \in P$, donc $d(P, O_3\left(\mathbb{R}\right)) \leq d(0, O_3\left(\mathbb{R}\right)) = \sqrt{3}$ d'après la première question.

Partie II

II.A)

- On a ${}^t({}^tM\,M) ={}^t M\,M$ donc ${}^tM\,M$ est symétrique
- Soit $\lambda \in Sp({}^tM\,M)$. Il existe X non nul tel que ${}^tM\,MX = \lambda X$ et donc ${}^tX{}^tM\,MX = \lambda{}^tXX$. Ce qui donne $\lambda = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

$$\boxed{{}^tMM \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})}$$

II.B) ${}^tM\,M$ est diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que ${}^tM\,M = P\,D\,P^{-1}$. De plus $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant les valeurs propres de ${}^tM\,M$. Comme les λ_i sont positifs on peut poser $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$ et $S = P\,\Delta\,P^{-1}$. S est à valeurs propres positives et ${}^tS ={}^t P^{-1t}S^tP = PSP^{-1}$ car S est symétrique et P orthogonale.

$$\boxed{\exists S \in S_3^+(\mathbb{R}) \text{ et } S^2 ={}^t M\,M}$$

II.C) Si M est inversible, ${}^tM\,M$ l'est aussi et donc aussi S.. Posons $U = M\,S^{-1}$et vérifions que que U est orthogonale. Comme S (donc S^{-1}) est symétrique on a :

$${}^tU\,U = S^{-1}\,{}^tM\,M\,S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_3$$

$$\boxed{\exists\,\{U, S\} \in O_3(\mathbb{R}) \times S_3^+(\mathbb{R})\ ,\ M = US}$$

II.D) On a $T ={}^t M\,M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$. Ce qui donne

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

.Les valeurs propres de T sont donc 1 (double) et 4 (simple).

Le sous espace propre $E_1(T)$ est le plan $\sqrt{2}y - z = 0$. Un vecteur normal $u = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ engendre donc $E_4(T)$. On prend alors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = u \wedge v = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

On a donc ${}^tM.M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(4,1,1)$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $P^{-1} = {}^tP$

D'après le début su **II** on pose $S = P\,\text{diag}\,(2,1,1)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & \dfrac{-\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \dfrac{-\sqrt{2}}{3} & 1/3 \end{pmatrix}$ et $U = MS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1/3 & -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & 1/3 \end{pmatrix}$.

On vérifie que U est orthogonale.

Remarque : La décomposition polaire d'une matrice inversible est unique. Vous devez trouver le même résultat quelque soit la base de vecteurs propres introduite.

Partie III

III.A.1) Un endomorphisme orthogonale conserve la norme euclidienne. On le retrouve sur les matrices comme ${}^tU.U = I_3$:

$$\|UA\|^2 = Tr({}^tA\,{}^tU\,U\,A) = Tr({}^tA\,A) = \|A\|^2$$

D'autre part une matrice et sa transposée ont même norme : Les coefficients sont les mêmes (à l'emplacement près) , donc la somme des carrées des coefficients est la même.
Comme la transposée d'une matrice orthogonale est encore orthogonale on a :

$$\|AU\| = \left\|{}^t(AU)\right\| = \left\|{}^tU\,{}^tA\right\| = \left\|{}^tA\right\| = \|A\|$$

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \forall U \in O_3(\mathbb{R}),\ \|AU\| = \|UA\| = \|A\|}$$

Si $A \in M_3(\mathbb{R})$, on décompose $A = US$ avec U orthogonale et S symétrique positive puis on diagonalise S dans une base orthonormale : $S = PD\,{}^tP$ où P est orthogonale et D diagonale à coefficients positifs. On a donc $A = UPD{}^tP$
Pour toute matrice $M \in O_3(\mathbb{R})$, on peut introduire N telle que $M = UPN{}^tP$ en posant $N = {}^tP{}^tUMP$. N est un produit de matrices orthogonales donc est encore orthogonale.
De plus l'application $M \longmapsto N$ est bijective (on a calculé la fonction réciproque).
On a alors $\|A - M\| = \left\|UPD^tP - UPN^tP\right\| = \|D - N\|$ d'après le début de la question. Comme on a une bijection $\{\|A - M\|, M \in O_3(\mathbb{R})\} = \{\|D - N\|, N \in O_3(\mathbb{R})\}$ ont la même borne inférieure. Donc

$$\boxed{d(A, O_3(\mathbb{R})) = d(D, O_3(\mathbb{R}))}$$

III.A.2) Avec la question **I.F.)** on sait qu'il existe une matrice $A \in$ V telle que $d(A, O_3(\mathbb{R})) = d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R}))$.
On regarde l'application α de V dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $M \longmapsto N = {}^tP{}^tUMP$.

- α est une application linéaire injective , puisque l'on multiplie par des matrices inversible. $\mathcal{W} = \alpha(\mathcal{V})$ est donc un sous espace vectoriel de même dimension que V .
- Comme à la question précédente (en prenant le couple M, N à la place du couple A, D: $\forall M \in$ V , $d(M, O_3(\mathbb{R})) = d(N, O_3(\mathbb{R}))$ et donc $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) = d(\mathcal{W}, O_3(\mathbb{R}))$
- La distance la plus petite dans V est atteinte en A , la distance la plus petite dans $\mathcal{W}$ est donc atteinte en $\alpha(A) = D$.

III.B.1) $\|D - U\|^2 = \|D\|^2 - 2\langle D, U\rangle + \|U\|^2$. Or $\|D\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2$ et $\|U\| = \sqrt{3}$ d'après **I.1**. Donc :

$$\boxed{\|D - U\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - 2\langle D, U\rangle + 3}$$

.
III.B.2) On pose $U = (u_{i,j})$,.

- Comme U est orthogonale on a pour tout j une colonne de norme 1 : $\sum_{i=1}^{3} u_{i,j}^2 = 1$, et donc $\forall i, \forall j$, $|u_{i,j}| \leq 1$.
- Le calcul donne alors $\langle D, U\rangle = Tr(DU) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$

$$\boxed{\langle D, U\rangle \leq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i}$$

III.B.3) On a $\langle D, I_3\rangle = Tr(D) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$. Et donc

$$\|D - I_3\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - 2\sum_{i=1}^{3} \lambda_i + 3$$

Et donc pour $U \in O_3(\mathbb{R})$,

$$\|D - U\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - 2\langle D, U\rangle + 3 \geq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - 2\sum_{i=1}^{3} \lambda_i + 3 = \|D - I_3\|^2$$

$\|D - I_3\|$ est donc un minorant de $\{\|D - U\|, U \in O_3(\mathbb{R})\}$. Comme $I_3 \in O_3(\mathbb{R})$, ce minorant est atteint et c'est le plus petit élément.

$$\boxed{d(D, O_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|}$$

.
III.C) D'après l'exemple du **II**, $D = diag(1, 1, 2)$ et donc $d(M, O_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\| = 1$.

Partie IV

IV.A.1) $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible ${}^tA\,A$ n'est pas inversible et donc 0 est valeur propre de ${}^tAA$. Soit λ_2 et λ_3 les deux autres.
La matrice D de la décomposition polaire est donc $D = \text{diag}(0, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$. Et la partie précédente donne le minimum

$$d(A, O_3(\mathbb{R})) = d\,(D, O_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\| = 1 + (\sqrt{\lambda_1} - 1)^2 + (\sqrt{\lambda_2} - 1)^2 \geq 1$$

Les distances sont plus grandes que 1 , donc aussi leur minimum.

$$\boxed{d\,(V, O_3(\mathbb{R})) \geq 1}$$

IV.A.2) La distance de I_3 à V est obtenue pour la projection orthogonale de I_3 sur V . Avec la notation usuelle de la base canonique de $\mathcal{M}_3\,(\mathbb{R})$, une base orthonormale de V est

$$(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,1}, E_{3,2})$$

la projection de I_3 sur V est $P = \sum \langle E_{i,j}, I_3 \rangle\, E_{i,j} = 1.E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + 1E_{2,2} + 0E_{3,1} + 0E_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a donc $d(I_3, \mathrm{V}) = \|I_3 - P\| = 1$
On peut aussi faire le calcul : $\|A - I_3\|^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 + (d-1)^2 + e^2 + f^2 + 1$. Cette norme est minimale pour $a = d = 1, b = c = e = f = 0$ et vaut alors 1. Donc

$$\boxed{d(I_3, \mathcal{V}) = 1}$$

Comme $I_3 \in O_3(\mathbb{R})$ on en déduit $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \leq 1$, et donc

$$\boxed{d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) = 1}$$

.

IV.B) D'après **I.F** , comme $\|D - I_3\|$ réalise le minimum des $\|M - U\|$, $M \in$ V et $U \in O_3\,(\mathbb{R})$, D est la projection orthogonale de I sur V . On a donc $D - I_3 \perp$ V et donc :

$$\boxed{\mathrm{V} \subset (D - I_3)^{\perp}}$$

l'inclusion est stricte car $dim(\mathcal{V}) = 6$ alors que $dim\left([\mathcal{V}ect(D - I_3)]^{\perp}\right) = 8$.

IV.C) On calcule $R_1'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $R_1'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et de même $R_2'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R_3'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que la famille est libre:

$$\alpha R_1'(0) + \beta R_2'(0) + \gamma R_3'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

cette matrice est nulle ssi $\alpha = \beta = \gamma = 0$
De plus en calculant les produits scalaires on constate que ces trois matrices sont orthogonales à toutes les matrices diagonales donc en particulier à $D - I_3$.
On a V sous espace vectoriel de $(D - I_3)^{\perp}$ de dimension 6 et $\mathcal{V}ect(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0))$ sous espace vectoriel de $(D - I_3)^{\perp}$ de dimension 3. Or $(D - I_3)^{\perp}$ est de dimension $9 - 1 = 8$ (car $D - I_3 \neq 0$) . Les deux sous espaces ne sont pas supplémentaires et leur intersection contient au moins un élément non nul.

$$\boxed{\exists (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\ ,\ aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) \in \mathcal{V}}$$

IV.D) On utilise la formule de Taylor-Young en 0 :

$$\begin{aligned} R_1(at) &= R_1(0) + atR_1'(0) + \frac{a^2t^2}{2} R"_1(0) + t^2\varepsilon_1(t) \\ &= I_3 + atR_1'(0) + \frac{a^2t^2}{2} R"_1(0) + t^2\varepsilon_1(t) \end{aligned}$$

De même avec R_2 et R_3.Par produit de développements limités on obtient :

$$f(t) = I_3 + t\,(aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0))$$
$$+ \frac{t^2}{2}\Big(\quad a^2R_1''(0) + b^2R_2''(0) + c^2R_3''(0) + abR_1'(0)R_2'(0) + acR_1'(0)R_3'(0) + abR_1'(0)R_2'(0) + bcR_2'(0)R_3'(0) + acR_1'(0)R_3'(0) + bcR_2'(0)$$
$$+ t^2\varepsilon(t)$$

On a donc :

- $A = aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) \in \mathcal{V}$, par la question précédente et le choix de (a, b, c)
- $C = \frac{1}{2}\left(a^2R_1''(0) + b^2R_2''(0) + c^2R_3''(0)\right) = \mathrm{diag}\left(-a^2 - b^2, -a^2 - c^2, -b^2 - c^2\right)$
- $B = \frac{1}{2}\left(abR_1'(0)R_2'(0) + acR_1'(0)R_3'(0) + abR_1'(0)R_2'(0) + bcR_2'(0)R_3'(0) + acR_1'(0)R_3'(0) + bcR_2'(0)R_3'(0)\right) \in (I_3 - D)^{\perp}$ par combinaison linéaire de matrices orthogonales à $D - I_3$ (question **IV.C.**)

IV.E) On a $\|I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t)\| = \|f(t) - (tA + D)\|$ avec $f(t) \in O_3(\mathbb{R})$ (produit de matrices de rotation) et $(tA + D) \in \mathcal{V}$ (propriété de A) donc $\|f(t) - (tA + D)\| \geq \inf = d(O_3(\mathbb{R}, \mathcal{V})) = \|I_3 - D\|$
IV.F) On développe

$$\begin{aligned}
\|I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t)\|^2 &= \left\langle I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t), I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t)\right\rangle \\
&= \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle D - I_3, B + C + \varepsilon(t)\rangle + t^4\|B + C + \varepsilon(t)\|^2 \\
&= \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\Big(\quad \langle D - I_3, C\rangle + \langle D - I_3, \varepsilon(t)\rangle\Big) + t^4\|B + C + \varepsilon(t)\|^2 \\
&= \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle D - I_3, C\rangle + t^2\Big(\quad 2\langle D - I_3, \varepsilon(t)\rangle + t^2\|B + C + \varepsilon(t)\|^2\Big)
\end{aligned}$$

Le terme $\langle D - I_3, B\rangle$ est nul car $B \perp D - I_3$.
On pose donc $\varepsilon_2(t) = 2\langle D - I_3, \varepsilon(t)\rangle + t^2\|B + C + \varepsilon(t)\|^2$ qui tend vers $2\langle D - I_3, 0\rangle + 0\|B + C\|^2 = 0$ (par continuité du produit scalaire)
Mais, d'après **IV.E)**,

$$\|I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t)\|^2 \geq \|I_3 - D\|^2$$

. On en déduit

$$2\langle I_3 - D, C\rangle + \varepsilon_2(t) \geq 0$$

. et donc en faisant tendre t vers 0 :

$$\boxed{\langle I_3 - D, C\rangle \geq 0}$$

IV.G) On calcule

$$\begin{aligned}
\langle I_3 - D, C\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\quad -\left(a^2 + b^2\right)(1 - x) - (a^2 + c^2)(1 - y) - (b^2 + c^2)(1 - z)\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\quad a^2(2 - x - y) + b^2(2 - x - z) + c^2(2 - y - z)\Big)
\end{aligned}$$

Si les trois expressions $(2 - x - y), (2 - x - z), (2 - y - z)$ sont strictement positives le produit scalaire est strictement négatif (a, b ou c est non nul). absurde d'après la question précédente.
IV.H) On a $D \in \mathcal{V}$ et $D - I_3 \perp \mathcal{V}$ donc $\langle D, D - I_3\rangle = 0$. D'où $\|D\|^2 = \langle D, I_3\rangle$, ce qui donne $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.
IV.I)

- E est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$ car

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

- F est un plan
- G est un demi-espace de frontière F.

- $E \cap F$ est un cercle un point ou l'ensemble vide. .Pour étudier l'intersection on calcule la distance de O' à F :

$$d(\Omega, F) = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\right|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (car } 6 > 4)$$

  donc $E \cap F$ est un cercle et le théorème de Pythagore, en donne le rayon du cercle $\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

- $E \cap G$ est une calotte sphérique de bord $E \cap F$.

  On remarque que $\Omega \notin G$. La calotte fait moins d'une demi sphère. Son diamètre est donc celui du cercle de base soit 1.

IV.J) $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R}) = \|D - I_3\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$.
d'après la question **IV.G)** et le sujet on a $X(x, y, z) \in G$, d'après la question **IV.I)** on a $(x, y, z) \in E$, et donc $(x, y, z) \in E \cap G$.
On vérifie que $P(1, 1, 1) \in E \cap G$. donc $\|D - I_3\| = XP$ est inférieur au diamètre de $E \cap G$ soit $\|D - I_3\| \leq 1$

$$\boxed{d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \leq 1}$$

On peut justifier par le calcul la propriété géométrique de la calotte sphérique en calculant en coordonnées sphériques , d'origine Ω et d'axe de Z l'axe de symétrie de la figure. On a alors $M(\theta, \phi)) = \begin{pmatrix} X = R\cos(\theta)\cos(\phi) \\ Y = R\sin(\theta)\cos(\phi) \\ Z = R\sin(\phi) \end{pmatrix}$ $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [-\pi/2, \pi/2]$
. avec $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ soit $\sin(\phi) \geq \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ce qui donne $\cos(\phi) \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
La distance de $M(\theta, \phi)$ à $M(\theta', \phi')$ est après simplification (aidée par ma calculatrice , mais c'est Centrale)

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{3}{2}\left(1 - \sin(\phi)\sin(\phi') - \cos(\phi)\cos(\phi')\cos(\theta - \theta')\right) \\ &\leq \frac{3}{2}\left(1 - \sin(\phi)\sin(\phi') + \cos(\phi)\cos(\phi')\right) \\ &\leq \frac{3}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 \end{aligned}$$