Partie I

Question 1

1.1. La fonction θ est définie deux fois en $\pi/2$ mais on vérifie que les deux fois $\theta\left(\pi/2\right)=0$.
L'étude des graphes demande une étude partielle des dérivées. La suite demande , pour les théorèmes de Dirichlet , une étude plus précise des classes des fonctions. Je fais les deux études ensemble.

- Sur $[0,\pi/2]$ la restriction de θ est C^{∞} et de dérivée $-2x$: θ décroît de $\frac{\pi^2}{4}$ à 0
- Sur $[\pi/2,\pi]$ la restriction de θ est C^{∞} et de dérivée $2(x-\pi)$: θ décroît de 0 à $-\frac{\pi^2}{4}$
- On remarque que en $\pi/2$ la dérivée à gauche est égale à la dérivée à droite (elle vaut $-\pi$) : la restriction de θ à $[0,\pi]$ est donc C^1 (et C^{∞}_{pm})
- par imparité la restriction de θ à $[-\pi,0]$ est C^1 et C^{∞}_{pm} et comme $\theta'\left(0^+\right)=\theta'\left(0^-\right)=0$ la restriction de θ à $[-\pi,\pi]$ est C^1 et C^{∞}_{pm}.
- par périodicité θ est donc C^{∞}_{pm} sur $\mathbb{R}$, mais $\theta'(\pi^-)=0$ et $\theta'(\pi^+)=\theta'(-\pi^+)$ (par périodicité) et donc $\theta'\left(\pi^+\right)=-\theta^{'}\left(\pi^-\right)=0$ par imparité de θ' . Donc θ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Enfin on peut remarquer que $\theta"(\pi/2^+)=2$ alors que $\theta"\left(\pi/2^-\right)=-2$: θ n'est pas C^2.
- la classe de θ' s'en déduit par dérivation.

$$\boxed{\theta\in C^1\left(\mathbb{R}\right),\theta\in C^{\infty}_{pm}\left(\mathbb{R}\right),\theta_1\in C^0\left(\mathbb{R}\right),\theta_1\in C^{\infty}_{pm}\left(\mathbb{R}\right)}$$

voir les graphes en annexe.

Les calculs précédents donnent le calcul de θ_1

$$\begin{cases} \forall x\in[0,\pi/2]\ ,\ \theta_1(x)=-2x \\ \forall x\in[\pi/2,\pi]\ ,\ \theta_1(x)=2(x-\pi) \end{cases}$$

de plus : θ étant paire θ_1 est impaire . θ étant 2π périodique θ_1 l'est aussi.

1.2. La fonction θ_1 étant impaire, on a

- $a_n(\theta_1)=0$ pour tout $n\in\ \mathbb{N}$,
- $b_n(\theta_1)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\theta_1(x)\ \sin(nx)\ dx$ pour tout $n\in\ \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$b_n(\theta_1)=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}(-2x)\ \sin(nx)\ dx+\int_{\pi/2}^{\pi}2(x-\pi)\ \sin(nx)\ dx\right)$$

par intégration par parties avec les foncions C^1 sur le segment $[0,\pi/2]$: $u(x)=x$ et $v(x)=-\frac{\cos(nx)}{n}$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}x\ \sin(nx\ )\ dx &= \left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(nx)}{n}dx=\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\frac{\pi}{2}\cos(n\pi/2)}{n}+\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}\end{aligned}$$

de même

$$\int_{\pi/2}^{\pi}(x-\pi)\sin(nx)\,dx=\left[-\frac{(x-\pi)\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}=-\frac{\frac{\pi}{2}\cos(n\pi/2))}{n}-\frac{\sin(n\pi/2)}{n}$$

donc $b_n(\theta_1)=-\frac{8}{\pi}.\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}$

- si $n=2k$ est pair on a $b_{2k}(\theta_1)=0$ pour tout $k\in\ \mathbb{N}^*$
- si $n=2k+1$ est impair $b_{2k+1}(\theta_1)=\frac{8\,(-1)^k}{\pi(2k+1)^2}$ pour tout $k\in\ \mathbb{N}$.
- La série de Fourier de θ_1 est donc $\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$.

La fonction θ_1 est continue, C^1 par morceaux, donc θ_1 est somme de sa série de Fourier : :

$$\boxed{\forall x\in\ \mathbb{R}\ ,\ \theta_1(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\ \sin\left((2k+1)x\right)}$$

et il y a convergence normale de cette série sur $\mathbb{R}$.

Question 2

Etude de θ

- La fonction θ est paire, donc $b_n(\theta)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
- pour $n>0$

  $$a_n(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta(t)\cos(nt)dt$$

  si on intègre par parties avec $u=\theta$ on a

  $$a_n(\theta)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta_1(t)\frac{\sin(nt)}{n}dt=-\frac{b_n(\theta_1)}{n}=\begin{cases}0 \text{ si } n=2k \text{ est pair}\\ \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \text{ si } n=2k+1 \text{ impair}\end{cases}$$

  (même si on ne la connaît pas par coeur on sait qu'il existe une relation entre les coefficients de Fourier de f et ceux de f')
- et pour $n=0$

  $$a_0(\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\theta(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(x^2-2\pi x+\frac{3\pi^2}{4}\right)dt\right)$$

  On peut alors calculer ces intégrales ou utiliser la symétrie du graphe : Si on pose $u=\pi-x$

  $$\int_{\pi/2}^{\pi}\left(x^2-2\pi x+\frac{3\pi^2}{4}\right)dt=-\int_{\pi/2}^{0}\left(u^2-\frac{\pi^2}{4}\right)du=-\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)dx$$
- La série de Fourier associée à la fonction θ est donc $\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\ \cos(2k+1)x$. Comme θ est continue , C^1_{pm} 2π-périodique, cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction θ : :

$$\boxed{\forall x\in\ \mathbb{R}\ ,\ \theta(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\ \cos(2k+1)x}$$

autre plan possible : justifier qu'on peut intégrer termes à termes la série donnant θ_1 , sans oublier la constante . Le calcul de $a_0(f)$ donne la constante.

Etude de Φ

- La fonction Φ est une primitive de θ Φ est donc C^2, C^∞_{pm} sur $\mathbb{R}$;
- La fonction Φ est 2π-périodique :

  $$\begin{aligned}\Phi(x+2\pi)-\Phi(x) &= \int_x^{x+2\pi}\theta(t)dt=\int_0^{2\pi}\theta(t)dt \text{ (} \theta \text{ est périodique de période } 2\pi)\\ &= \pi a_0(\theta)=0\end{aligned}$$
- La fonction Φ est impaire

  $$\Phi(-x)=\int_0^{-x}\theta(t)dt=\int_0^{x}\theta(-u)(-du)=-\Phi(x) \text{ par parité de } \theta$$

  donc $a_n(\Phi)=0$ pour tout $n\in\ \mathbb{N}$.
- Une intégration par parties comme pour θ donne $b_n(\Phi)=\frac{1}{n}a_n(\theta)$ pour tout $n\in\ \mathbb{N}^*$,
- La série de Fourier de Φ est $\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^4}\ \sin(2k+1)x$.
- Ici encore,comme la fonction est continue C^1_{pm} 2π périodique il y a convergence normale de cette série vers la fonction Φ

$$\boxed{\forall x\in\ \mathbb{R}\ ,\ \Phi(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^4}\ \sin(2k+1)x}$$

Au secours , je n'ai pas su faire les calculs.
Les remarques de parité doivent vous donner $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \sin(kx)$ et vous exprimer la suite en fonction des $b_k\,(\Phi)$. On ne sera même limité dans les justifications théoriques car l'hypothèse $b_k\,(\Phi)$ bornée suffira dans toutes les questions sauf une ;et encore dans cette question Φ C^1, C^2_{pm} donc $b_k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ suffira.A défaut Il faudra plusieurs fois donner un énoncé clair du théorème et admettre que ça marche ou admettre les hypothèses sur les b_k en le rédigeant très clairement..

Partie 2.

Remarque : le sujet ne respecte pas le programme de PSI (ni celui de PC) puisque on utilise des fonctions C^2 sur un domaine du plan qui n'est pas un ouvert.

Question 1

1.1. Si g est C^2 sur $[0,\pi]$ alors $(x,t) -> g(x)$ est C^2 sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}^{+*}$, de même pour h , et donc V est aussi C^2 sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}^{+*}$ par produit de fonctions C^2 .
On a alors par hypothèses sur g et h :pour $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,t) = g''(x)\,h(t) = \mu\,g(x)\,h(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = g(x)\,h'(t) = \mu\,g(x)\,h(t)$$

donc la relation **(1)** est satisfaite sur $[0,\pi]\times\ \mathbb{R}^{+*}$.

1.2.

- Pour h on a une équation différentielle linéaire du premier ordre à résoudre :
  $h'(t) - \mu\,h(t) = 0 \iff \boxed{h(t) = C\,e^{\mu t}}$ avec C constante réelle ;
- Pour g on a une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est $r^2 - \mu = 0$ de racines : $\begin{cases} 0 \text{ racine double si } \mu = 0 \\ \pm i\sqrt{-\mu} \text{ racines non réels si } \mu < 0 \\ \pm\sqrt{\mu}\text{ , racines réelles } \mu > 0 \end{cases}$

  $g''(x) - \mu\,g(x) = 0 \iff \boxed{g(x) = \begin{cases} Ax + B & \text{si } \mu = 0 \\ A\cos\left(\sqrt{-\mu}x\right) + B\sin\left(\sqrt{-\mu}x\right) & \text{si } \mu < 0 \\ A\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\mu}x\right) + B\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\mu}x\right) & \text{si } \mu > 0 \end{cases}}$ A et B étant deux constantes réelles.

  même si toute la suite supposera $\mu < 0$, ne pas oublier les autres cas.

  dans le cas "négatif" il est possible de commencer le calcul avec les solutions sous forme d'exponentielles complexes . Il faudra alors revenir à la trigo au cours de la question 2.

1.3.

- On a $g_k(x) = A'_k\,\cos kx + B'_k\,\sin kx$ et $h_k(t) = C'_k\,e^{-k^2 t}$, donc :
  $$V_k(x,t) = (A_k\,\cos kx + B_k\,\sin kx)\,e^{-k^2 t}$$
  en posant $A_k = A'_k C'_k$ et $B_k = B'_k C'_k$
- Les fonctions V_k sont alors toutes continues sur , C^2 sur $[0,\pi]\times\ \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant la condition (1)
- Les conditions **(2)** imposent :$\forall t \in \mathbb{R}^+$: $A_k e^{-k^2 t} = 0$ donc $A_k = 0$,
- La condition (3) est toujours vérifiée car :
  $$|V_k(x,t)| \leq (|A_k| + |B_k|)\,e^{-k^2 t} \text{ de limite nulle car } -k^2 < 0$$
  donc
  $$\boxed{V_k(x,t) = B_k\,\sin kx\,e^{-k^2 t}}$$

Question 2

Rappel : avec les séries le calcul va vite , le justifier théoriquement est la partie la plus longue du travail.

2.1. Si on cherche H sous la forme $H(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\,\sin kx\,e^{-k^2 t}$ (somme d'une série trigonométrique supposée convergente), on a $H(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\,\sin kx$. La relation **(4)** impose

$$H(x,0) = \Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(\Phi)\sin(kx)$$

elle est donc vérifiée en prenant $\boxed{d_k = b_k(\Phi)}$, soit $d_{2p} = 0$ et $d_{2p+1} = \frac{8.(-1)^p}{\pi.(2p+1)^4}$.
On a une solution . Rien ne garanti à ce stade qu'elle est unique (le cours ne dit pas que si deux séries trigonométriques sont égales leurs coefficients sont égaux , c'est vrai seulement pour les séries de Fourier , et le sujet ne suppose pas $x -> H(x,t)$ D.S.F.) . l'unicité sera l'objet de la troisième partie.

2.2. Posons donc $H(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(\Phi)\sin(kx)\;e^{-k^2 t}$,

- La fonction H est bien définie sur et il y a convergence absolue de la série définissant H puisque :

$$\left| b_k(\Phi)\sin(kx)\ e^{-k^2t}\right| \leq |b_k(\Phi)|\, e^{-k^2t} \leq \frac{8}{\pi}e^{-k^2t}$$

et la série $\sum e^{-k^2t}$ convergente (série à termes positifs telle que $\lim\left(k^2e^{-k^2t}\right) = 0$ car $t > 0$)

Si le calcul de la question 1 a échoué , il suffit de savoir que les coefficients de Fourier sont bornés (limite nulle).

- travaillons à $t > 0$ fixé pour dériver par rapport à x . Soit $H_1(x)$ la fonction partielle.
On souhaite écrire

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) = H_1"(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\ \left(-k^2\sin(kx)\right)e^{-k^2t}$$

il faut donc dériver deux fois sous le signe $\sum$:

  - la fonction $x- > b_k(\Phi)\sin(kx)e^{-k^2t}$ est C^2 sur $[0,\pi]$
  - la série $\sum b_k(\Phi)\sin(kx)e^{-k^2t}$ converge absolument donc simplement sur $[0,\pi]$
  - la série des dérivées $\sum b_k(\Phi)\,k\sin(kx)e^{-k^2t}$ converge aussi simplement :

$$\left|b_k(\Phi)\,k\sin(kx)e^{-k^2t}\right| \leq \frac{8}{\pi}ke^{-k^2t} \text{ et } \lim\left(k^3e^{-k^2t}\right) = 0$$

  - la série des dérivées secondes $-\sum b_k(\Phi)\,k^2\sin(kx)e^{-k^2t}$ converge normalement donc uniformément sur $[0,\pi]$:

$$\left|b_k(\Phi)\,k^2\sin(kx)e^{-k^2t}\right| \leq \frac{8}{\pi}k^2e^{-k^2t} \text{ indépendant de } x \text{ et } \lim\left(k^4e^{-k^2t}\right) = 0$$

On peut dériver termes à termes la série donnant $H"_1$ donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\ (\Phi)\left(-k^2\sin(kx)\right)e^{-k^2t}}$$

L'important est de bien rédiger la dérivation termes à termes par rapport à x , Parler de H_1 n'est pas obligatoire
Ici aussi l'hypothèse que les coefficients de Fourier sont bornés suffit.

- travaillons à $x \in [0,\pi]$ fixé pour dériver par rapport à t :
On souhaite écrire

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\ (\sin(kx))\,(-k^2e^{-k^2t})$$

et donc dériver sous le signe $\sum$ par rapport à t .

  - la fonction $t- > b_k(\Phi)\sin(kx)e^{-k^2t}$ est C^2 sur$\mathbb{R}^{+*}$
  - la série $\sum b_k(\Phi)\sin(kx)e^{-k^2t}$ converge absolument donc simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$
  - la série des dérivées $\sum -k^2b_k(\Phi)\sin(kx)e^{-k^2t}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$

$$\left|b_k(\Phi)\sin(kx)k^2e^{-k^2t}\right| \leq \frac{8}{\pi}k^2e^{-k^2t} \leq \frac{8}{\pi}k^2e^{-k^2a} \text{ indépendant de } t \text{ et } \lim\left(k^4e^{-k^2a}\right) = 0$$

  - on peut dériver terme à terme par rapport à la variable t et :

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\ (\Phi)\sin(kx)\left(-k^2e^{-k^2t}\right)}$$

Ici aussi l'hypothèse que les coefficients de Fourier sont bornés suffit.

Question 3.
Soit la fonction $H : H(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^4}\ \sin(2p+1)x\ e^{-(2p+1)^2t}$. La fonction H est définie sur

- H est alors continue sur :
On peut en effet dominer $\left|\frac{(-1)^p}{(2p+1)^4}\ \sin(2p+1)x\ e^{-(2p+1)^2t}\right|$ par $\frac{1}{(2p+1)^4}$ terme général d'une série convergente indépendante de x et t .
si on n'a pas le résultat du calcul on a besoin de savoir que $\sum|b_k(\Phi)|$ converge. Il faut réussir à montrer que $b_k(\Phi) = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, possible sans calcul avec la classe de la fonction.

- H est C^2 sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}^{+*}$
  - Les calculs faits à la question précédente montrent que H admet des dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ continues sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}^{+*}$.
  - De la même façon $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\ (\Phi)\sin(kx)\left(k^4e^{-k^2t}\right)$ et est continue par domination sur tout segment de $\left|b_k\ (\Phi)\sin(kx)\left(k^4e^{-k^2t}\right)\right|$ par $\frac{8}{\pi}k^4e^{-k^2a}$
  - On recommence encore avec les dérivées croisées

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial t}(x,t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 b_k\ (\Phi)\cos(kx)e^{-k^2t}\\ \frac{\partial^2 H}{\partial t\partial x}(x,t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 b_k\ (\Phi)\cos(kx)e^{-k^2t}\end{aligned}$$

    et domination sur tout segment par $k^3e^{-k^2a}$

- H vérifie (1) : conséquence du calcul des dérivées à la question 2.2 :
- H vérifie (2) : évident en prenant $x=0$ et $x=\pi$ on à $H(0,t)=H(\pi,t)=\sum 0=0$
- H vérifie (3) : On doit passer à la limite dans une série . On souhaite écrire pour x fixé

$$\lim_{t->+\infty}(H(x,t))=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\ (\Phi)\sin(kx)\lim_{t->+\infty}\left(e^{-k^2t}\right)=0$$

  On a donc besoin de la convergence uniforme sur un intervalle du type $[a,+\infty[$. or la domination par $\frac{8}{\pi}e^{-k^2a}$ permet de conclure en prenant $a>0$.

  On peut aussi majorer $|H(x,t)|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{8}{\pi}e^{-k^2t}\le\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{8}{\pi}e^{-kt}=\frac{8e^{-t}}{\pi}.\frac{1}{1-e^{-t}}$ (srie géométrique) de limite nulle.
- H vérifie (4) par choix des d_k

$$\boxed{H \text{ est solution de (P)}}$$

remarque :la continuité et la classe de H ne sont pas clairement dans la proposition (P) . Mas si on a bien su dériver au 2.2. la rédaction de cette partie peut-être très rapide.

Partie 3

question 1

1.1. Vérifions que E est un sous espace vectoriel de $C^0(\ \ ,\ \mathbb{R})$,:

- $E\subset C^0(\ \ ,\ \mathbb{R})$
- $E\neq\emptyset$
- on a stabilité par combinaisons linéaires:

  si w_1 et w_2 sont deux fonctions de E et si λ_1 et λ_2 sont deux réels :
  - $(\lambda_1w_1+\lambda_2w_2)$ est C^2 sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}^{+*}$ par produit de fonctions C^2
  - $\frac{\partial^2(\lambda_1w_1+\lambda_2w_2)}{\partial x^2}=\lambda_1\frac{\partial^2(w_1)}{\partial x^2}+\lambda_2\frac{\partial^2(w_2)}{\partial x^2}=\lambda_1\frac{\partial(w_1)}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial(w_2)}{\partial t}=\frac{\partial(\lambda_1w_1+\lambda_2w_2)}{\partial t}$
  - $(\lambda_1w_1+\lambda_2w_2)(0,t)=\lambda_1w_1(0,t)+\lambda_2w_2(0,t)=0$
  - $(\lambda_1w_1+\lambda_2w_2)(\pi,t)=\lambda_1w_1(\pi,t)+\lambda_2w_2(\pi,t)=0$
  - $\lim_{t->+\infty}(\lambda_1w_1+\lambda_2w_2)(x,t)=\lambda_1\lim_{t->+\infty}(w_1(x,t))+\lambda_2\lim_{t->+\infty}(w_2(x,t))=0$ (linéarité de la limite)
  - $(\lambda_1w_1+\lambda_2w_2)(x,0)=\lambda_1w_1(x,0)+\lambda_2w_2(x,0)=0$
- donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\ \ ,\ \mathbb{R})$.

1.2. C'est presque : évident :

- $(u-v)$ est continue sur , C^2 sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}^{+*}$ par combinaison linéaires de telles fonctions
- (1),(2) et (3) sont vérifiés comme au 1.1
- enfin $w(x,0)=u(x,0)-v(x,0)=\Phi(x)-\Phi(x)=0$

Question 2
2.1.
• Pour $t=0$, danger : le sujet ne suppose pas ω C^1 il faut donc justifier l'existence de la dérivée partielle :
Or dans ce cas on a $\omega(x,0)=0$ pour tout $x\in[0,\pi]$, donc la dérivée partielle $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ est définie en ces points et vaut 0, puis $\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega(x,0)\,\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,0)\right)=0$, donc l'intégrale proposée est nulle.
• Pour $t>0$, la fonction $x\mapsto\omega(x,t)$ est de classe C^2 sur $[0,\pi]$, donc $\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)$ est C^1 ainsi que $\omega(x,t)\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)$. La fonction $\frac{\partial}{\partial x}\ (\omega(x,t)\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)\ )$ est donc continue sur $[0,\pi]$ l'intégrale existe et vaut $\left[\omega(x,t)\,\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)\right]_{x=0}^{x=\pi}=0$ puisque $\omega(0,t)=\omega(\pi,t)=0$.

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\ (\omega(x,t)\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)\ )\,dx=0}$$

2.2. Pour $t\in\mathbb{R}^{+*}$, on a, en utilisant **(1)**, :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\ (\omega(x,t)\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)\ ) &= (\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)\ )^2+\omega(x,t)\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}(x,t)\\ &= (\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)\ )^2+\omega(x,t)\,\frac{\partial\omega}{\partial t}(x,t)\\ &= (\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)\ )^2+\frac{1}{2}\,\frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x,t)\ ,\end{aligned}$$

pour $t=0$ je ne vois pas comment prouver que la fonction partielle $t->\omega^2(x,t)$ est dérivable en $t=0$ avec les hypothèses du sujet.*Si vous connaissez un corrigé qui traite proprement de la question je suis preneur.*

$$\forall t>0\ ,\ \int_0^\pi\left((\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)\ )^2+\frac{1}{2}\,\frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x,t)\right)dx=0$$

J'admet que pour $(x,0)$ **la fonction** $\frac{\partial\omega}{\partial t}$**existe et est continue donc que la relation est vraie pour** $t=0$**.**
2.3 La fonction précédente étant identiquement nulle , son intégrale sur tout segfment est nulle.
La première intégrale est l'intégrale d'une fonction positive , donc est positive (les bornes étant dans le bon sens : $0\le T$, $0\le\pi$)
La seconde intégrale est aussi positive : elle se transforme grâce au théorème de Fubini la fonction à intégrer étant continue .

$$\begin{aligned}\int_0^T\ (\int_0^\pi\omega(x,t)\frac{\partial\omega}{\partial t}(x,t)\,dx\ )\,dt &= \int_0^\pi\ \left(\int_0^T\frac{1}{2}\,\frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x,t)\,dt\right)\ dx\\ &= \int_0^\pi\left[\frac{1}{2}\,\omega^2(x,t)\right]_{t=0}^{t=T}\ dx=\frac{1}{2}\,\int_0^\pi\omega^2(x,T)\,dx\ ,\end{aligned}$$

donc $\psi(T)$ est la somme de deux termes positifs. Les deux termes sont nuls, en particulier :

$$\boxed{\forall T\in\mathbb{R}^+\qquad \int_0^\pi\omega^2(x,T)\,dx=0}\ .$$

2.4. La fonction $x\mapsto\omega^2(x,T)$ est continue et positive sur $[0,\pi]$ et son intégrale est nulle ; elle est donc identiquement nulle. Donc $\omega=0$ sur .
2.5. Le problème **(P)** a donc une solution unique, qui est la fonction H obtenue à la **question 3.** de la **partie 2.**