Centrale -Supélec PC 2011 MATHÉMATIQUE 1

Partie I: intervention de séries entières

I.Toute fonction développable en série entière est C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et on peut y déribver la série entière termes à termes.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}, f^{(k)}(0)=k!a_k}$$

I.B

I.B 1)Si f existe sur]-δ,δ[: $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{u_n}{n!}=\dfrac{2^n}{n!}$. et donc $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^nx^n}{n!}=e^{2x}$.

On a une série entière de rayon de convergence $R=+\infty$. La fonction trouvée est solution sur tout intervalle $]-\delta,\delta[$

$$\boxed{f(x)=e^{2x}}$$

I.B 2)Idem: $f(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p(2p)!x^{2p}}{(2p)!}=\sum_{p=0}^{+\infty}(-x^2)^p=\frac{1}{1+x^2}$avec $R=1$, on prend $\delta\in]0,1[$.

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{1+x^2}}$$

I.C La solution éventuelle est la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!x^n}{n!}$.

mais $\dfrac{2n!}{n!}=(2n).(2n-1)\cdots(n+1)\geq n.(n-1)\cdots 1$ donc $\left|\dfrac{(2n)!x^n}{n!}\right|\geq n!\,|x|^n$ tend vers $+\infty$ pour $x\neq 0$.
La série convergence uniquement en 0 et on ne peut donc trouver de $\delta>0$.

$$\boxed{\text{il n'existe pas de fonction développable en série entière telle que } \forall k\in\mathbb{N}\text{ , } f^{(k)}=(2k)!}$$

Partie II: le théorème de Borel

II.A
II. A. 1)
a)Sur $]0,1[$ g est C^∞ (l'exposant est C^∞ car fraction rationnelle à dénominateur non nul et exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$).

On fait une récurrence sur p :

- $p=0$: $\forall x\in]0,1[$, $g^{(0)}(x)=g(x)=\dfrac{1}{(x(x-1))^{2\times 0}}\exp\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right)$ donc $Q_0(x)=1$ qui est un polynôme.
- Supposons la formule vraie au rang $p-1$: il existe un polynôme Q_{p-1} tel que

$$\forall x\in]0,1[\text{ , } g^{(p)}(x)=\frac{Q_{p-1}(x)\exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)}{(x(x-1))^{2p-2}}$$

on peut dériver le quotient et :

$$g^{(p)}(x)=(g^{(p-1)})'(x)=\frac{1}{(x(x-1))^{4p-4}}\left[\begin{array}{c}\left[Q'_{p-1}(x)\exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)+Q_{p-1}(x)\frac{2x-1}{(x(x-1))^2}\exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)\right](x(x-1))^{2p-2}-\\ \left[Q_{p-1}(x)\exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)\right]\left[\left((2p-2)(x(x-1))^{2p-3}(2x-1)\right)\ \right]\end{array}\right]$$

En simplifiant par $(x(x-1))^{2p-4}$

$$g^{(p)}(x)=\frac{Q'_{p-1}(x)(x(x-1))^2-(2x-1)Q_{p-1}(x)-(2p-2)Q_{p-1}(x)(2x-1)(x(x-1))}{(x(x-1))^{2p}}\exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$$

On obtient bien :

$$g^{(p)}(x)=\frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}}e^{\frac{1}{x((x-1)}}$$

avec

$$\boxed{Q_p(x)=(x(x-1))^2\,Q'_{p-1}(x)-(2x-1)\left[(2p-2)x(x-1)+1\right]Q_{p-1}(x)}$$

c'est bien un polynôme par dérivation , somme et produit de polynômes.

b)Montrons par récurrence sur p que Q_p est de degré $3p-2$ si $p \geq 1$.

- $p = 1$ par calcul $Q_1(x) = 1 - 2x$ $\deg(Q_1) = 1 = 3 \times 1 - 2$.
- Supposons Q_{p-1} de degré $3p-5$: $Q_{p-1} = \lambda_{p-1}x^{3p-2} + R_{-1}$ avec $d^\circ(R_{p-1}) < 3p-5$ et $\lambda_{p-1} \neq 0$
  par théorèmes sur le degré d'une somme et d'un produit : $d^\circ(Q_p) = \max\left(4 + d^\circ(Q_{p-1}) - 1, 3 + d^\circ(Q_{p-1})\right) \leq 3p-2$.
  danger : le degré d'une somme est inférieur au max des degrés. A priori il n'est pas égal.
  Cherchons le coefficient de x^{3p-2} dans Q_p
  $$\lambda_p = (3p-5)\lambda_{p-1} - 2(2p-2)\lambda_{p-1} = (-p-1)\,\lambda_{p-1} \neq 0$$
  Les termes de plus haut degré ne se simplifient pas
  $$\boxed{\forall p \geq 1 \text{ , } d^\circ(Q_p) = 3p-2}$$

  c) au choix :

- Une procédure itérative sera:

```
Q:=proc(n)

local E;

E:=1;

for p from 1 to n do

diff(E,X)*X^2*(X-1)^2-(2*X-1)*E*((2*p-2)*X*(X-1)+1);
E:=sort(expand(%));

od;
E;

end;
```

- ou la même avec un tableau en prenant `E[p-1]` et `E[p]`
- Une procédure récursive sera

```
Q:=proc(n)

local E;

if n=0
  then E:=1
  else E:=Q(n-1);
diff(E,X)*X^2*(X-1)^2-(2*X-1)*E*((2*n-2)*X*(X-1)+1);
  sort(expand(%));
fi;
end;
```

- avec la définition on peut écrire (mais ce sera sans doute refuser car le sujet semble autorisé la dérivée première et pas la dérivée k-ème)
  Q:=n-> exp(-1/X/(X-1))*X^(2*n)*(1-X)^(2*n)*diff(exp(1/X/(X-1),X$n);

II. A. 2)

a) $\lim\limits_{0^+}\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right)=\lim\limits_{1^-}\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right)=-\infty$.

Donc en 0^+ comme en 1^- l'expression $\dfrac{1}{(x(x-1))^{2p}}e^{\frac{1}{x((x-1)}}$ est du type $u^{2p}e^{-u}$ en $-\infty$, donc tend vers 0

Comme Q_p est un polynôme Q_p admet donc une limite finie en 0 et en 1 .Par produit des limites

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}\ ,\ \lim_{0^+} g^{(p)}(x)=\lim_{1^-} g^{(p)}(x)=0}$$

b)

- Il est évident que la restriction de g est C^∞ sur $]-\infty,0]$ et sur $[1,+\infty[$ et que toutes les dérivées y sont nulles.
- en particulier $g^{(p)}(0^-)=g^p(1^+)=0$
- On a déjà prouvé que la restriction de g était C^∞ sur $]0,1[$
- En 0^+ g est dérivable à tout ordre est $g^{(p)}(0^+)=0$:

  On utilise par récurrence le théorème de prolongement de la dérivée :

  – $g^{(0)}$ est bien continue en 0^+ car $\lim\limits_{0^+}(g)=0=g(0)$
  – la restriction de g à $[0,1[$ est continue , C^1 sur $]0,1[$ et g' admet une limite (nulle) en 0^+ . Donc g est C^1 sur $[0,1[$ et $g'(0^+)=0$
  – Si on suppose que la restriction de g à $[0,1[$ est C^{p-1} et que $g^{(p-1)}(0^+)=0$ alors le théorème s'applique à $g^{(p-1)}$ et donc la restriction de g est C^p et $g^{(p)}(0^+)=0$
- même chose en 1^-
- en 0 et en 1 : les dérivées à gauche sont égales aux dérivées à droite , donc g est C^∞ en ces points.

$$\boxed{g\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Enfin il est évident que g est nulle en dehors du segment $[0,1]$

$$\boxed{g\in\mathcal{W}}$$

II.B

II.B 1)

- La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ .Elle y admet une primitive G C^∞ sur $\mathbb{R}$;.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\frac{G(1)-G(x-1)}{G(1)-G(0)}$$

- Le dénominateur est non nul : sur $]0,1[$, $G'(x)=g(x)>0$. Et donc G est strictement croissante sur $[0,1]$ et $G(1)>G(0)$.
- G et $x\to x-1$ étant C^∞ sur $\mathbb{R}$, par composition :

$$\boxed{h\text{ est }C^\infty\text{sur }\mathbb{R}}$$

- si $x\leq 1$, $x-1\leq 0$, or sur $]-\infty,0]$, $G'=g=0$ donc $h'(x)=\dfrac{-G'(x-1)}{G(1)-G(0)}=0$ et h est constante avec $h(1)=\dfrac{G(1)-G(0)}{G(1)-G(0)}=1$
- de même si $x\geq 2$, $x-1\geq 1$ et donc $h'(x)=0$ et h est constante avec $h(2)=\dfrac{G(1)-G(1)}{G(1)-G(0)}=0$

$$\boxed{\forall x\leq 1\ ,\ h(x)=1,\ \forall x\geq 2\ h(x)=0}$$

II.B 2)
a) φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ par composition et produit de fonctions C^∞
On vérifie sans problème par récurrence simple évidente que $(h(2x))^{(p)} = 2^p h^{(p)}(2x)$ et $(h(-2x))^{(p)} = (-2)^p\, h^{(p)}(-2x)$.
ϕ est un produit qui se dérive par la formule de Leibniz: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \left(h(2x)\right)^{(k)} h(-2x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k h^{(k)}(2x)(-2)^{n-k} h^{(n-k)}(-2x) \\ &= 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} h^{(k)}(2x) h^{(n-k)}(-2x)\end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$ on a $k > 0$ ou $n-k > 0$, et donc comme h est constante sur $]-\infty, 1[$ $h^{(k)}(0) = 0$ ou $h^{(n-k)}(0) = 0$

$$\varphi^{(n)}(0) = 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} h^{(k)}(0) h^{(n-k)}(0) = 0$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^{(n)}(0) = 0}$$

b)

-
- φ est pair.
- Pour $x \geq 1$, $2x \geq 2$ et $h(2x) = 0$ d'où $\varphi(x) = 0$.
- Si $x \in [0, 1/2]$, $2x \leq 1$ et $-2x \leq 1$ donc $\varphi(x) = 1.1 = 1$
- si $x \in [1/2, 1]$, $2x \in [1, 2]$ et $-2x \in [-2, -1]$, $\varphi(x) = h(2x)$, donc $\varphi'(x) = 2\dfrac{-g(2x)}{G(1) - G(0)} < 0$.

φ est décroissante sur $[1/2, 1]$.

x	0		1/2		1		$+\infty$
$\varphi(x)$	1	$cste = 1$	1	$\searrow$	0	$Cste = 0$	

c) $\mu_k = \max\limits_{[-1,1]} \left(\left|\varphi^{(k)}\right|\right)$ existe car $\left|\varphi^{(k)}\right|$ est une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$ donc admet un plus grand élément.
$\max\limits_{k=0..p-1} (\mu_k)$ existe car tout ensemble fini admet un plus grand élément.

$$\boxed{\lambda_p = \max_{k=0..p-1} \left(\max_{[-1,1]} \left(\left|\varphi^{(k)}\right|\right)\right) \text{ existe}}$$

II.C
II.C 1)
a) Pour $n \geq 1$ g_n est le produit et le composée de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ g_n \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

b) Si $|x| \geq \dfrac{1}{\beta_n}$, $|\beta_n x| \geq 1$,et donc $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x) = 0$. (car φ est nulle en dehors de $[-1, 1]$)
II.C 2)$n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ avec $j < n$

a)

- Par récurrence simple $(\varphi(\beta_n x))^{(p)} = \beta_n^p \varphi^{(p)}(\beta_n x)$
- Par dérivation d'un monôme $(x^n)^{(p)} = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}x^{n-p} \text{ si } p < n \\ n! \text{ si } p = n \\ 0 \text{ si } p > n \end{cases}$

- Par la formule de Leibniz en remarquant que $j < n$ donc $j - i < n$.

$$\begin{aligned} g_n^{(j)}(x) &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left(\varphi(\beta_n x)\right)^{(i)} \left(x^n\right)^{(j-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!} \end{aligned}$$

b)Si $x = 0$, x^{n-j+i} est toujours nul car $j < n$ et donc $n - j + i > 0$.

$$\boxed{\text{si } j < n \text{ , } g_n^{(i)}(x) = 0}$$

c)

- Si $|x| > 1/\beta_n$, la fonction g_n est nulle au voisinage de x. $g_n^{(j)}(x) = 0$
- de même si $x = \dfrac{1}{\beta_n}$, comme g est C^∞ , $g^{(j)}(x) = g^{(j)}(x^+) = 0$ car g est nulle à droite de x.
- de même en $x = -\dfrac{1}{\beta_n}$

d) Si $|\beta_n x| \leq 1$, On a

$$u_n g_n^{(j)}(x) = u_n \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left(\beta_n\right)^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$$

avec les majorations :$|x| \leq \dfrac{1}{\beta_n}$, $\left|\varphi^{(i)}(\beta_n x)\right| \leq \lambda_n$, $\dfrac{1}{(n-j+i)!} \leq 1$ on a :

$$\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leq u_n \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left(\beta_n\right)^i \lambda_n \left(1/\beta_n\right)^{n-j+i} = u_n \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \lambda_n \left(1/\beta_n\right)^{n-j}$$

Comme $\beta_n \geq 1$, et $n - j \geq 1$, $\beta_n^{n-j} \geq \beta_n$ et donc $\left(1/\beta_n\right)^{n-j} \leq \dfrac{1}{\beta_n}$

$$\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leq u_n \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \lambda_n \left(1/\beta_n\right) = \left(u_n \lambda_n \left(1/\beta_n\right)\right) \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} = \left(u_n \lambda_n \left(1/\beta_n\right)\right) 2^j$$

et enfin on utilise $j < n$ (donc $j \leq n - 1$ dans les entiers) et $\beta_n \geq 4^n \left|u_n\right| \lambda_n$

$$\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leq (1)\, 2^{n-1} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\boxed{\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}}$$

II.C 3)La formule de Leibniz s'applique encore pour $j \geq n$:

- si $j = n$ on isole le premier terme $i = 0$ pour avoir $\left(x^n\right)^{(n)} = n!$

$$\begin{aligned} g_n^{(n)}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\varphi(\beta_n x)\right)^{(i)} \left(x^n\right)^{(n-i)} \\ &= \varphi\left(\beta_n x\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!} \end{aligned}$$

  soit si $x = 0$

$$g_n^{(n)}(0) = \varphi(0) + \sum 0 = 1$$

- si $j > n$ on sépare les trois cas du calcul de $(x^n)^{(i)}$: $j-i<n$, $j-i=n$ et $j-i>n$

$$\begin{aligned} g_n^{(j)}(x) &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left(\varphi(\beta_n x)\right)^{(i)} (x^n)^{(j-i)} \\ &= \sum 0 + \varphi^{(j-n)}(\beta_n x) + \sum_{i=j-n+1}^{j} \binom{n}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!} \end{aligned}$$

soit si $x=0$, comme toutes les dérivées en 0 de φ sont nulles :

$$g_n^{(n)}(0) = \varphi^{(j-n)}(0) + \sum 0 = 0$$

$$\boxed{g_n^{(j)}(0) = \delta_{j,n}}$$

II.C 4)σ est définie comme la somme d'une série de fonctions C^∞ . d'après les questions II.C.2.c) et II.C.2.d on a pour tout x réel et pour $n \geq j$ (à partir du rang j) $\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Comme $\frac{1}{2^{n+1}}$ est indépendant de x et comme la série $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ converge , la série $\sum u_n g_n^{(j)}(x)$ converge normalement pour tout j . d'après le théorème de dérivation d'une série de fonctions σ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\sigma^{(j)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}(0) = \sum_{j \neq n} 0 + u_j g_j^{(j)}(0) = u_j$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N} \text{ , } \sigma^{(j)} = u_j}$$

remarque : comme $\beta_n \geq 1$, $[-1/\beta_n, 1/\beta_n] \subset [-1,1]$, donc pour tout n g_n est nulle en dehors de $[-1,1]$ et donc σ est nulle en dehors de $[-1,1]$.

$$\boxed{\sigma \in \mathcal{W}}$$

Partie III: un autre élément de $\mathcal{W}$

III.A

III.A.1)On peut remarquer que f_0 est paire et que

- Si $x \in [0, a_0]$, $f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}(x + a_0 - x + a_0 - 2x) = \frac{-x+a_0}{a_0^2}$.

- Si $x \geq a_0$, $f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}(x + a_0 + x - a_0 - 2x) = 0$.

$$\boxed{|x| \geq a_0 \Rightarrow f_0(x) = 0}$$

La fonction $x \mapsto |x|$ étant continue sur $\mathbb{R}$. f_0 est somme et composée de fonctions continues donc

$$\boxed{f_0 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

III.A.2)

a) par parité l'étude sur $\mathbb{R}^+$ suffit

- Si $x \in [0, a_0]$,$|f_0(x)| = \left|\frac{-x+a_0}{a_0^2}\right| \leq \frac{1}{a_0}$

- Si $x \geq a_0$, $|f_0(x)| = 0 \leq \frac{1}{a_0}$ (car $a_0 > 0$)

b) f est k lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.

- Sur $[0, a_0]$ f_0 est dérivable de dérivée $\frac{1}{a_0^2}$. D'après l'inégalité des accroissement finis $|f_0(x) - f_0(y)| \leq \frac{1}{a_0^2}|x-y|$.

- Sur $[a_0, +\infty[$, $|f_0(x) - f_0(y)| = 0 \leq \frac{1}{a_0^2}|x-y|$.

- Si $0 \leq x < a_0 < y$: $|f_0(x)-f_0(y)| \leq |f_0(x)-f_0(a_0)|+|f_0(a_0)-f_0(y)| \leq \frac{1}{a_0^2}(a_0-x)+\frac{1}{a_0^2}(y-a_0) = \frac{1}{a_0^2}(y-x).= \frac{1}{a_0^2}|x-y|$
- Si $0 \leq y < a_0 < x$: idem par symétrie.

  f_0 est $\frac{1}{a_0^2}$ lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$ donc aussi sur $\mathbb{R}^-$
- Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ le résultat est vrai par parité.
- Si $x < 0 < y$: $|f_0(x)-f_0(y)| \leq |f_0(x)-f_0(0)|+|f_0(0)-f_0(y)| \leq \frac{1}{a_0^2}|x|+\frac{1}{a_0^2}y = \frac{1}{a_0^2}(y-x).= \frac{1}{a_0^2}|x-y|$

$$\boxed{f_0 \text{ est } \frac{1}{a_0^2} \text{ lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$$

III.B

III. B. 1)f_0 continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc sur $\mathbb{R}$ une primitive F_0 de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par combinaison linéaire et composition $f_1(x) = \frac{F_0(x+a_1)-F_0(x-a_1)}{2a_1}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f_1'(x) = \frac{f_0(x+a_1)-f_0(x-a_1)}{2a_1}}$$

f_1 est paire car : $f_1(-x) = \int_{-x-a_1}^{-x+a_1} f_0(t)dt = \int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(-u)du = f_1(x)$ en posant $u=-t$ et en utilisant la parité de f_0

III. B. 2)Si $x \geq a_0+a_1$, $x-a_1 \geq a_0$ donc $[x-a_1, x+a_1] \subset [a_0, +\infty[$, $f_1(x) = \int_{x-a_1}^{x+a_1} 0.dt = 0$

par parité :

$$\boxed{|x| \geq a_0+a_1 \Rightarrow f_1(x) = 0}$$

III. B. 3)Les bornes de l'intégrale sont toujours dans le bon sens (car $a_1 > 0$) donc :

$$|f_1(x)| \leq \frac{1}{2|a_1|}\int_{x-a_1}^{x+a_1} |f_0(t)|dt \leq \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} \frac{1}{a_0}dt = \frac{1}{a_0}$$

Comme f est $\frac{1}{a_0^2}$ lipschitzienne) : :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_1'(x)| = \frac{1}{2a_1}|f_0(x+a_1)-f_0(x-a_1)| \leq \frac{1}{2a_1}\frac{1}{a_0^2}|2a_1| = \frac{1}{a_0^2}$$

Comme la suite des a_n est décroissante positive:$\frac{1}{a_0^2} \leq \frac{1}{a_1 a_0}$,et donc $|f_1'(x)| \leq \frac{1}{a_1 a_0}$

Remarque : on peut avoir le résultat plus simplement en majorant $|f_0|$ *par* $\frac{1}{a_0}$. *Mais cela ne suffiraz pas pour la qustion suivante;*

III. B. 4)

On utilise de nouveau l'inégalité des accroissements finis pour f_1 de classe C^1 :ainsi que la première inégalité ci dessus.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f_1(x)-f_1(y)| \leq \sup_{[x,y]}|f_1'|.|x-y| \leq \frac{1}{a_0^2}|x-y|$$

$$\boxed{f_1 \text{ est } \frac{1}{a_0^2} \text{ lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$$

III.C

III.C 1)Par récurrence.

- f_0 est C^0 et f_1 est C^1
- Si f_{n-1} est C^{n-1}, une primitive F_{n-1} est C^n donc $f_n(x) = \frac{F_{n-1}(x+a_n)-F_{n-1}(x-a_n)1}{2a_n}$ est aussi C^n

$$\boxed{f_n \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

En dérivant la relation précédente :

$$f_n'(x) = \frac{f_{n-1}(x+a_n)-f_{n-1}(x-a_n)}{2a_n}$$

comme pour f_1 le changement de variable $u=-t$ montre que f_n est paire.

III.C.2)Par récurrence

- $f_0(x)$ est nulle si $|x| \geq a_0$, $f_1(x)$ est nulle si $|x| \geq a_0 + a_1$
- On suppose f_{n-1} nulle si $|x| \geq \sum_{k=0}^{n-1} a_k$
  - Si $x \geq \sum_{k=0}^{n} a_k$, $[x - a_n, x + a_n] \subset [\sum_{k=0}^{n-1} a_k, +\infty[$ donc $f_n(x) = \int_{x-a_n}^{x+a_n} 0 dt = 0$
  - par parité le résultat est vrai si $x \leq -\sum_{k=0}^{n} a_k$

$$\boxed{\text{Si } |x| \geq \sum_{k=0}^{n} a_k \ , \ f_n(x) = 0}$$

III.C.3)majoration de f_n : par récurrence

- $|f_0|$ et $|f_1|$ sont majorés par $\dfrac{1}{a_0}$
- On suppose $|f_{n-1}|$ majoré par $\dfrac{1}{a_0}$.Comme les bornes sont dans le bon sens :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2a_n} \int_{x-a_n}^{x+a_n} |f_{n-1}(t)dt| \leq \frac{1}{2a_n} \left(2a_n . \frac{1}{a_0} \right) = \frac{1}{a_0}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \sup_{\mathbb{R}} (|f_n|) \leq \frac{1}{a_0}}$$

III.C.3)majoration de $f_n^{(p)}$: par récurrence sur n : H_n : $\forall p \leq n$, $\sup_{\mathbb{R}} \left(\left| f_n^{(p)} \right| \right) \leq \dfrac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$

- la propriété est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$
- On la suppose vrai au rang $n - 1$.
  - D'après la dérivation de f_n pour $p \in [[0, n-1]]$:

$$\left| f_n^{(p)}(x) \right| = \left| \frac{f_{n-1}^{(p-1)}(x + a_n) - f_{n-1}^{(p-1)}(x - a_n)}{2a_n} \right|$$

  On majore par l'inégalité des accroissement finis :

$$\left| f_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{1}{2a_n} \left(2a_n \sup \left(\left| f_{n-1}^{(p)} \right| \right) \right) \leq \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$$

  - et pour $p = n$:

$$\left| f_n^{(n)}(x) \right| = \left| \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x + a_n) - f_{n-1}^{(n-1)}(x - a_n)}{2a_n} \right| \leq \frac{2 \sup \left(\left| f^{(n-1)} \right| \right)}{2a_n} \leq \frac{1}{a_n} . \frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1}} = \frac{1}{a_0 \cdots a_n}$$

III.C.4): La majoration précédente de $|f_n'|$ ne suffit pas . Mais pour $p = 1$ la relation précédente donne

$$\left| f_n'(x) \right| \leq \frac{1}{2a_n} \left(2a_n \sup \left(\left| f_{n-1}' \right| \right) \right)$$

et par le même type de récurrence : $\sup (|f_n'|) \leq \dfrac{1}{a_0^2}$ Et donc par les accroissements finis $\boxed{f_n \text{ est } \frac{1}{a_0^2} \text{ lipschitzienne}}$.

III.C.5)On utilise une intégrale double (cf figure) , en faisant attention aux domaines où les fonctions sont non nulles.

- f_n est nulle en dehors de $\left[-\sum_{k=0}^{n} a_k, \sum_{k=0}^{n} a_k\right]$ et $S \geq \sum_{k=0}^{n} a_k$ (série à termes positifs) donc :

$$\begin{aligned}\int_{-S}^{S} f_n(x)dx &= \int_{-\sum_{k=0}^{n} a_k}^{\sum_{k=0}^{n} a_k} \frac{1}{2a_n}\left(\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)dt\right)dx \\ &= \int\int_{\Delta} \frac{1}{2a_n} f_{n-1}(t)dtdx\end{aligned}$$

où Δ est un parallélogramme ayant les équations $\begin{cases} -\sum_{k=0}^{n} a_k \leq x \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \\ x - a_n \leq t \leq x + a_n \end{cases}$. mais on peut retirer à Δ les deux petits triangles $t \leq -\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ et $t \geq \sum_{k=0}^{n} a_k$ où la fonctions f_{n-1} est nulle.

L'intégrale sur Δ a donc la même valeur que l'intégrale sur le parallélogramme (plus petit) Δ' d'équations : $\begin{cases} -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq t \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ t - a_n \leq x \leq t + a_n \end{cases}$

et donc :

$$\int_{-S}^{S} f_n(x)dx = \int_{-\sum_{k=0}^{n-1} a_k}^{\sum_{k=0}^{n-1} a_k} \left(\int_{t-a_n}^{t+a_n} \frac{f_{n-1}(t)}{2a_n}dx\right)dt$$

Dans l'intégrale intérieure la fonction $\frac{f_{n-1}(t)}{2a_n}$ ne dépend pas de la variable d'intégration x donc

$$\int_{-S}^{S} f_n(x)dx = \int_{-\sum_{k=0}^{n-1} a_k}^{\sum_{k=0}^{n-1} a_k} \left(\frac{f_{n-1}(t)}{2a_n}\int_{t-a_n}^{t+a_n} dx\right)dt = \int_{-\sum_{k=0}^{n-1} a_k}^{\sum_{k=0}^{n-1} a_k} f_{n-1}(t)dt = \int_{-S}^{S} f_{n-1}(t)dt$$

La suite des intégrales est constante et

$$\int_{-S}^{S} f_0(t)dt = \int_{-a_0}^{a_0} f_0(t)dt = 2\int_{0}^{a_0} f_0(t)dt = 2\int_{0}^{a_0} \frac{-t+a_0}{a_0^2}dt = 2\frac{-a_0^2/2 + a_0^2}{a_0^2} = 1$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; , \int_{-S}^{S} f_n(t)dt = 1}$$

III. D

III.D.1)L'étude de $k_n = f_n - f_{n-1}$ est la méthode usuelle d'étude d'une suite par la série des différences.

a) Avec la notation du III.C F_{n-1} est une primitive de f_{n-1} on a

$$k_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) = \frac{F_{n-1}(x+a_n) - F_{n-1}(x-a_n)}{2a_n} - F'_{n-1}(x)$$

ce qui permet d'utiliser la formule de Taylor Lagrange pour $n-1 \geq 1$. $F_{n-1}(x+h) = F_{n-1}(x) + hF'_{n-1}(x) + R_{n-1}(h)$ avec $|R_{n-1}(h)| \leq \frac{h^2}{2}\sup(|F"_n|)$ qui existe d'après III.C.3 : $\sup(|F"_{n-1}|) = \sup\left(\left|f'_{n-1}\right|\right) \leq \frac{1}{a_0 a_1}$.Et donc :

$$\begin{aligned}k_n(x) &= \frac{F_{n-1}(x) + a_n F'_{n-1}(x) + R_{n-1}(a_n) - F_{n-1}(x) + a_n F'_{n-1}(x) - R_{n-1}(-a_n)}{2a_n} - F'_{n-1}(x) \\ &= \frac{R_{n-1}(a_n) - R_{n-1}(a_{n-1})}{2a_n}\end{aligned}$$

On majore en valeur absolue:

$$|k_n(x)| \leq \frac{a_n^2 \frac{1}{a_0 a_1}}{2a_n} = \frac{a_n}{2}\frac{1}{a_0 a_1} \leq \frac{a_n}{2}\frac{1}{a_0^2}$$

$$\boxed{\forall n \geq 2 \; , |k_n(x)| \leq \frac{a_n}{2}\frac{1}{a_0^2}}$$

J'ai besoin de la dérivée de f_{n-1} . j'ai donc besoin de $n-1 \geq 1$. Je n'ai pas répondu exactement à la question posée . (erreur de texte ?) De toute façon pour la convergence normale il suffit de majorer à partir d'un certain rang.

On peut aussi utiliser que f_{n-1} est $k-$lipschitzienne , mais il me manque un coefficient 2 :
Comme F_{n-1} est C^1 l'égalité des accroissement fini donne :

$$F_{n-1}(x+a_n) - F_{n-1}(x-a_n) - 2a_nF'_{n-1}(x) = 2a_nF'_{n-1}(c) - 2a_nF'_{n-1}(x) \text{ avec } c \in [x-a_n, x+a_n]$$

donc comme $F'_{n-1} = f_{n-1}$ est $k-$lipschitzienne :

$$\left|F_{n-1}(x+a_n) - F_{n-1}(x-a_n) - 2a_nF'_{n-1}(x)\right| \leq 2a_nk\,|c-x| \leq 2a_nka_n$$

et donc $|k_n(x)| \leq a_n.k$
b)pour $n \geq 2$, $\left(\dfrac{1}{2a_0^2}a_n\right)$ est une suite majorante , indépendante de x et telle que $\sum \dfrac{1}{2a_0^2}a_n$ converge

$$\boxed{\text{La série } \sum k_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}}$$

III.D.2)

a)La série $\sum f_n - f_{n-1}$ converge donc la suite (f_n) converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n - f_{n-1}=\lim(f_n) - f_0$ soit $s = w - f_0$

$$\boxed{w = s + f_0}$$

b)Par passage à la limite dans II.C.3) : $|f_n(x)| \leq 1/a_0$ on obtient $\boxed{|w(x)| \leq 1/a_0}$.

c) Par passage à la limite dans II.C.4) : $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \dfrac{1}{a_0^2}|x-y|$.on a : $\boxed{|w(x) - w(y)| \leq \dfrac{1}{a_0^2}|x-y|}$.

d) Pour $|x| \geq S$, on a $|x| \geq S_n$ et donc $f_n(x) = 0$. donc par passage à la limite : $\boxed{|x| \geq S \Rightarrow \omega(x) = 0}$
III.D.3)
a) On a d'après III.C.5 : $\displaystyle\int_{-S}^{S} f_n(t)dt = 1$.
On veut passer à la limite d'où : théorème de convergence dominée:

- $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n est continue sur $[-S, S]$
- la suite (f_n) converge simplement vers w.
- w est continue sur $[-S, S]$ car lipschitzienne.
- On a domination car pour tous (x, n) $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$, fonction continue sur $[-S, S]$.

$$\boxed{\int_{-S}^{S} w(t)dt = 1}$$

b) La fonction w n'est donc pas nulle sur $\mathbb{R}$.
III.D.4)
a) Pour $n \geq 2$ et x réel on peut écrire:

$$k'_n(x) = f'_n(x) - f'_{n-1}(x) = \frac{f_{n-1}(x+a_n) - f_{n-1}(x-a_n)}{2a_n} - f'_{n-1}(x)$$

le même calcul qu'à la question précédente en remplaçant F_{n-1} par f_{n-1} donne pour $n \geq 3$: :

$$|k'_n(x)| \leq \frac{a_n^2 \sup(|f"_{n-1}|)}{2a_n} = \frac{a_n}{2}\frac{1}{a_0a_1a_2}$$

On a donc pour

$$\boxed{n \geq 3, \sup_{\mathbb{R}} |k'_n| \leq \frac{a_n}{2a_0a_1a_2}}$$

et donc comme $\sum a_n$ converge , on a par majoration (séries à termes positifs) $\sum k'_n$ qui converge normalement.

b). $\sum_{n=2}^{+\infty}(f_n - f_{n-1}) = \lim (f_n) - f_1 = w - f_1$

$$w = \sum_{n=2}^{+\infty} k_n + f_1$$

c) théorème de dérivation termes à termes : La série $\sum k_n$ est une série convergente de fonctions C^1(pour $n \geq 2$) telle que la série $\sum k_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. . La somme de la série est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $w = \sum_{n=2}^{+\infty} k_n + f_1$ est donc C^1 comme somme de deux fonctions C^1.

$$\boxed{w \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

d)On peut dériver termes à termes la série et donc exprimer w' comme une limite:

$$w'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(f_n'(x) - f_{n-1}'(x)) + f_1'(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x).$$

Au III.C.3) pour $p = 1$ on avait $|f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1}$.Il suffit de passer à la limite $\boxed{|w'(x)| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1}}$

III.D.5)Idem en décalant les indices :k_n est C^p pour $n \geq p+1$ et

$$k_n^{(p)}(x) = f_n^{(p)}(x) - f_{n-1}^{(p)}(x) = \frac{f_{n-1}^{(p-1)}(x + a_n) - f_{n-1}^{(p-1)}(x - a_n)}{2a_n} - f_{n-1}^{(p)}(x)$$

pour $n \geq p+2$: :

$$\left|k_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{a_n^2 \sup\left(\left|f_{n-1}^{(p+1)}\right|\right)}{2a_n} = \frac{a_n}{2} \frac{1}{a_0 \cdots a_p a_{p+1}}$$

d'où la convergence normale de $\sum_n k_n^{(p)}$. Donc la classe C_p de $\sum_{n=p+1}^{+\infty} k_n$. Or $w = \sum_{n=p+1}^{+\infty} k_n + f_p$.

La dérivation termes à termes de la série donne $w^{(p)} = \lim_{n->+\infty}\left(f_n^{(p)}\right)$ et donc par passage à la limite $\left|w^{(p)}\right| \leq \dfrac{1}{a_0 \cdots a_p}$

On a bien montrer que $w \in \mathcal{W}$.