Mathématique 1

PC **2011**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Le but des deux premières parties est d'étudier l'existence d'une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0. Les deux parties suivantes sont consacrées à des classes de fonctions pour lesquelles les dérivées successives en 0 de f déterminent complètement la fonction f.

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans $\mathcal{W}$). On notera $\binom{n}{p}$ ou C_n^p les coefficients binomiaux.

I Intervention des séries entières

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On cherche dans cette partie des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, qui sont somme d'une série entière sur un intervalle $]-\delta,\delta[$ pour au moins un réel $\delta > 0$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = u_n$.

I.A – Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-\delta,\delta[$, avec $\delta > 0$, donner une expression de $f^{(k)}(x)$ sur $]-\delta,\delta[$, et en déduire $f^{(k)}(0)$ en fonction de a_k pour tout $k \geqslant 0$.

I.B – Dans les exemples suivants, proposer une solution f, en précisant une valeur de δ convenable :

I.B.1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

I.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair, $u_n = (-1)^{n/2} n!$, et pour tout n impair, $u_n = 0$.

I.C – Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n)!$, montrer qu'aucune fonction du type considéré dans cette partie n'est solution du problème.

II Le théorème de Borel

II.A – Une fonction en cloche

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

II.A.1)

a) Montrer que pour tout naturel p il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0,1[\,, \qquad g^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, exprimer Q_p en fonction de Q_{p-1} et Q'_{p-1}.

b) En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, Q_p est de degré $3p-2$.

c) Écrire dans le langage de calcul formel de votre choix un algorithme d'argument un entier p renvoyant la valeur de Q_p en fonction d'une indéterminée X.

On pourra utiliser la commande renvoyant, à partir d'une expression E et d'une variable x, la valeur de la dérivée de cette expression par rapport à cette variable que l'on pourra noter **diff(E,x)** *ou* **D[E,x]** *selon le langage choisi.*

II.A.2)

a) Montrer que pour tout entier naturel p

$$\lim_{x\to 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x\to 1^-} g^{(p)}(x) = 0.$$

b) En déduire que $g \in \mathcal{W}$.

II.B – Une fonction en plateau

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par $h(x) = \dfrac{\int_{x-1}^{1} g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt}$.

II.B.1) Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, constante sur $]-\infty,1]$ et sur $[2,\infty[$.

II.B.2) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$ pour tout réel x.

a) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.

b) Montrer que φ est nulle en dehors de $[-1,1]$ et tracer sommairement l'allure de son graphe.

c) Justifier pour tout entier naturel p non nul l'existence du réel

$$\lambda_p = \max_{k\in\{0,\dots,p-1\}} \max_{x\in[-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|$$

II.C – Le théorème de Borel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit pour tout entier naturel n une fonction g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_0(x) = \varphi(x) \quad \text{ et si } n \geqslant 1 \quad g_n(x) = \frac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x)$$

où $\beta_n = \max(1{,}4^n|u_n|\lambda_n)$.

II.C.1)

a) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction g_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g_n est nulle hors du segment $\left[-\dfrac{1}{\beta_n}, \dfrac{1}{\beta_n}\right]$.

II.C.2) Soit n et j des entiers naturels tels que $j < n$.

a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.$$

b) En déduire que $g_n^{(j)}(0) = 0$.

c) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \geqslant \dfrac{1}{\beta_n}$, on a $g_n^{(j)}(x) = 0$.

d) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leqslant \dfrac{1}{\beta_n}$, on a $\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leqslant 2^{-(n+1)}$.

II.C.3) Déduire des questions précédentes que pour n, $j \in \mathbb{N}$,

$$g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$$

II.C.4) En considérant $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_n g_n$, montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(0) = u_j$ (théorème de Borel).

III Un autre élément de $\mathcal{W}$

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante de limite nulle, et telle que la série $\sum a_n$ converge.

III.A – Une fonction affine par morceaux

On pose pour tout x réel

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}\left(|x + a_0| + |x - a_0| - 2|x|\right).$$

III.A.1) Montrer que f_0 est nulle en dehors de $[-a_0, a_0]$, préciser sa valeur sur $[-a_0, 0]$ et $[0, a_0]$, justifier sa continuité et tracer rapidement son graphe.

III.A.2) On pose $k = \dfrac{1}{a_0^2}$.

a) Pour tout réel x, montrer que $|f_0(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$.

b) Montrer que f_0 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.B – La première étape

On pose pour tout x réel

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t)\, dt$$

III.B.1) Montrer que f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_1'(x)$ pour tout x réel.

III.B.2) Montrer que f_1 est nulle en dehors de $[-a_0 - a_1, a_0 + a_1]$.

III.B.3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_1(x)| \leqslant \frac{1}{a_0}$ et $|f_1'(x)| \leqslant \frac{1}{a_0 a_1}$.

III.B.4) Montrer que f_1 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.C – Une suite de fonctions

On définit par récurrence une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions par f_0 et f_1 définies comme dans les questions précédentes et, pour tout naturel $n \geqslant 2$ et tout x réel,

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,dt$$

III.C.1) Montrer que f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_n'(x)$ pour tout x réel.

III.C.2) Montrer que f_n est nulle en dehors de $[-\sum_{i=0}^n a_i, \sum_{i=0}^n a_i]$.

III.C.3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$ et que, si $p \leqslant n$, on a $\left|f_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$.

III.C.4) Montrer que f_n est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.C.5) Montrer que pour tout naturel n

$$\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt = 1 \quad \text{où } S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

III.D – La limite

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} k_n$ où $k_n = f_n - f_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

III.D.1)

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x, montrer que $|k_n(x)| \leqslant \dfrac{k}{2}a_n$.

b) En déduire la convergence normale de la série de fonctions $\sum k_n$.

Pour tout réel x, on note

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x)$$

III.D.2)

a) Montrer que pour tout x réel, $f_n(x)$ converge vers une limite que l'on notera $w(x)$ et qui vérifie $w(x) = f_0(x) + s(x)$.

b) Pour tout réel x réel, montrer que $|w(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$.

c) Montrer que w est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que w est nulle en dehors du segment $[-S, S]$.

III.D.3)

a) Montrer que

$$\int_{-S}^{S} w(t)\,dt = 1.$$

b) En déduire que w n'est pas constante nulle sur $\mathbb{R}$.

III.D.4)

a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 2}(f_n' - f_{n-1}')$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w, f_1 et $\sum_{n=2}^{\infty}(f_n - f_{n-1})$.

c) En déduire que w est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $|w'(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1}$.

III.D.5) Soit $p \geqslant 2$.

a) Montrer que $\sum_{n\geqslant p+1}(f_n^{(p)} - f_{n-1}^{(p)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w, f_p et $\sum_{n=p+1}^{\infty}(f_n - f_{n-1})$.

c) En déduire que w est de classe C^p sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel , $|w^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$.