E3A PSI 2011, MATH A

Sujet réécrit et adapté pour ne pas parler de "valeur propre" , "vecteur propre" et "diagonalisation" .

Questions de cours

1. Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables si et seulement si M et N sont les matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$dans deux bases différentes Ce qui équivaut à dire qu'il existe une matrice P inversible telle que $M = PNP^{-1}$.

   1. **Vrai**
      Deux matrices semblables ont le même rang : Le produit par une matrice inversible ne change pas le rang .
   2. **Faux**
      Soit $M = I_n$ et $N = 2I_n$. M et N sont de même rang n et ne sont pas semblables (elles n'ont pas la même trace)
   3. **Vrai**
      Deux matrices semblables ont le même déterminant : $\det(PMP^{-1}) = \det(P)\det(M)\det(P)^{-1} = \det(M)$ car le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$.
   4. **Faux si** $n \geq 2$
      Soit $M = 0_n$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ ont le même déterminant (0) et ne sont pas semblable (elle n'ont pas le même rang)
      Si $n = 1$ deux matrices ayant le même déterminant sont égales donc semblables.
   5. **Faux**
      Si $A = I_n$ on a $A^2 + 5A - 6I_n = 0_n$ et $\mathrm{Ker}\,(A + I_n) \oplus \mathrm{Ker}\,(A - 6I_n) = \mathrm{Ker}(2I_n) \oplus \mathrm{Ker}\,(-5I_n) = \{0\} \neq \mathbb{R}^n$
      En passant par le polynôme annulateur on a si $A^2 + 5A - 6I_n = 0_n$ que A est diagonalisable et que le spectre de A est inclus dans $\{1, -6\}$ donc $\mathrm{Ker}\,(A - I_n) \oplus \mathrm{Ker}\,(A + 6I_n) = \mathbb{R}^n$
   6. **Vrai**
      $X^2 - 5X - 6$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples -1 et 6 . A est diagonalisable et $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{-1, 6\}$. Comme Sp est touours non vide on a 3 possibilités pour Sp :
      - $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-1, 6\}$ et $\mathbb{R}^n$ est somme directe des sous espaces propres
      - $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-1\}$ et A diagonalisable représente l'homothétie de rapport -1 $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(A + I_n) = \mathrm{Ker}\,(A + I_n) \oplus \{0\}$
      - $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{6\}$ est symétrique
   7. **Vrai**
      Si M et N sont semblables $M - \lambda I_n$ et $N - \lambda I_n$ sont semblables.
   8. **Faux si** $n \geq 2$
      prendre $M = 0_n$ et N une matrice nilpotente non nul.
      vrai si $n = 1$

PARTIE 1

1.

   1. On calcule la matrice : $B = {}^t AA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
   2. On prend dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (i, j, k) f_A telle que $Mat_{i,jk}\,(f_A) = A$ et on cherche une base (I, J, K) telle que $Mat_{i,jk}\,(I, J, K) = D$
      - $f_A(I) = 0$ donne dans la base (i, j, k) les équations : $\begin{cases} 4x + 4z = 0 \\ 2y = 0 \\ 4x + 4z = 0 \end{cases}$ $I \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
      - $f_A(J) = 2J$ donne dans la base (i, j, k) les équations : $\begin{cases} 4x + 4z = 2x \\ 2y = 2y \\ 4x + 4z = 2z \end{cases}$ $I \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
      - $f_A(K) = 4K$ donne dans la base (i, j, k) les équations : $\begin{cases} 4x + 4z = 8x \\ 2y = 8y \\ 4x + 4z = 8z \end{cases}$ $I \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ce qui donne $\boxed{P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}$ avec $\det(P)=2$.Donc P est inversible.

3. La matrice est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée.

   B est de rang ≤ 2 car $C_3-C_1=0$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est dans le noyau. On prend $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

   $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est vecteur propre évident pour la valeur propre 2. $e_3=e\wedge e_2$ donne le troisème vecteur propre et la trace la troisième valeur propre.

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

2.

1.

- $\boxed{\mathcal{C}\text{ est une quadrique}}$.
- Il n'y a pas de terme de degré 1 donc O est centre de symétrie.
- La matrice associée à la forme quadratique est alors $B/2$. $2x^2+4xy+y^2+2z^2={}^tX\,(B/2)\,X$ si $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

. D'après la question précédente , dans la base orthonormée (I,J,K) $B/2$ est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

Soit (X,Y,Z) les coordonnées dans (I,J,K) .La quadrique $\mathcal{C}$ a pour équation $Y^2+4Z^2=1$.

$$\boxed{\mathcal{C}\text{ est un cylindre.}}$$

ses sections droites sont des ellipses.

Il est invariant par

- – toute translation suivant l'axe (OX).
  – toute symétrie par rapport à un plan $X=Cste$
  – les symétries par rapport aux plans XOY et XOZ
  – et leurs composés.

2.

- Pour C_1, on obtient l'équation $y^2+2z^2=1$. $\boxed{\mathcal{C}_1\text{ est une ellipse}}$
- Pour C_2, on obtient l'équation $2x^2+4xz+2z^2=2(x+z)^2=1$. Cela conduit à $z=-x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $z=-x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,
  $\boxed{\mathcal{C}_2\text{ est l'union de deux droites parallèles}}$
  Les deux droites sont deux génératrices du cylindre.
- Pour C_3, on obtient l'équation $2x^2+y^2=1$. $\boxed{\mathcal{C}_3\text{ est une ellipse}}$

1. préliminaire : si $p=0$ On divise 1 par P , le quotient est nul et le reste est 1 .
   Dans toute la suite on prend $p\in\mathbb{N}^*$
   On factorise : $P(X)=X^3-10X^2+16X=X(X-2)(X-8)$
   La division euclidienne de X^p par X^3-10X^2+16X s'écrit :

$$X^p=P(X)Q(X)+R(X)\text{ avec }d^\circ(R)<3$$

   On pose donc trois réels tels que $R(X)=aX^2+bX+c$
   la valeur en 0, donne $c=0$.
   la valeur en 2, donne $2^p=4a+2b$.

celle en 8, donne $8^p = 64a + 8b$.

On peut résoudre le système 2×2 (par Cramer par exemple).

A l'aide des formule de Cramer, on obtient que $a = \dfrac{8.2^p - 2.8^p}{-96}$, $b = \dfrac{4.8^p - 64.2^p}{-96}$, $c = 0$

Le reste est donc

$$R(X) = \frac{-4.2^p + .8^p}{48} X^2 + \frac{16.2^p - 8^p}{24} X$$

variante: On peut calculer le reste par interpolation de Lagrange . On pose $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 8$. Comme $X^p = Q(X)P(X) + R(X)$ avec $d^\circ(R) < 3$, on a $x_i^p = R(x_i)$, donc comme $d^\circ(R) < 3$:

$$R(X) = \sum_{i=à}^{2} R(x_i) L_i(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i^p L_i(X)$$

2. On calcule $B^3 - 10B^2 + 16B$, ou(plus rapide) on écrit que comme B et D représentent le même endomorphisme $B^3 - 10B^2 + 16B = 0_3$ si et seulement si $D^3 - 10D^2 + 16D = 0_3$, ce qui se vérifie sans problème.

   La matrice B est semblable à D donc $\det(B) = \det(D) = 0$.

   $$\boxed{B \text{ n'est pas inversible}}$$

3. La division euclidienne de la question 3.1 donne $X^p = Q(X)X(X-2)(X-8) + \dfrac{-4.2^p + .8^p}{48} X^2 + \dfrac{16.2^p - 8^p}{24} X$.

   et donc comme $P(B) = 0_3$: $B^p = \dfrac{-4.2^p + .8^p}{48} B^2 + \dfrac{16.2^p - 8^p}{24} B$

   $\boxed{\text{Pour } p \in \mathbb{N}^* \text{ , existe deux réels } a_p = \dfrac{-4.2^p + .8^p}{48} \text{ et } b_p = \dfrac{16.2^p - 8^p}{24} \text{ tels que } B^p = a_p B^2 + b_p B}$

   Si le calcul du reste n'a pas été trouvé , on peut revenir au matrices semblables : $B^p = a_p B^2 + b_p B \Leftrightarrow D^p = a_p D^2 + b_p D$, et poser le système.

4. On décompose : $T_p = I_3 + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} B^k = I_3 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left(a_k B^2 + b_k B \right)$ à l'aide de la question précédente.

   D'où $\boxed{T_p = I_3 + (\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} a_k) B^2 + (\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} b_k) B}$.

   On passe à la limite quand p tend vers $+\infty$.

   Décomposons chaque somme :

   $$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} a_k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_k - a_0 = -\frac{4}{48} \sum_{k=0}^{p} \frac{2^k}{k!} + \frac{1}{48} \sum_{k=0}^{p} \frac{8^k}{k!} + \frac{1}{16}$$

   On reconnaît le développement en série entière de $\exp(x)$:

   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} a_k = \frac{e^8}{48} - \frac{e^2}{12} + \frac{1}{16}$$

   De même,

   $$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} b_k = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{p} \frac{2^p}{p!} - \frac{1}{24} \sum_{k=0}^{p} \frac{8^p}{p!} - \frac{5}{8} \rightarrow_{p \to +\infty} \frac{2}{3} e^2 - \frac{1}{24} e^8 - \frac{5}{8}$$

   On a donc

   $$\lim_{p \to +\infty} T_p = I_3 + \left(\frac{e^8}{48} - \frac{e^2}{12} + \frac{1}{16} \right) B^2 + \left(\frac{2}{3} e^2 - \frac{1}{24} e^8 - \frac{5}{8} \right) B$$

   .

   Si on cherche les coefficients on obtient la matrice suivante :

   $$\lim_{p \to +\infty} T_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^8 + 1) & 0 & \frac{1}{2}(e^8 - 1) \\ 0 & e^2 & 0 \\ \frac{1}{2}(e^8 - 1) & 0 & \frac{1}{2}(e^8 + 1) \end{pmatrix}$$

PARTIE 2

1. On a désormais $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\3&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

   On a : $u_1=e_1$ de matrice $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ puis $u_2=f(e_1)$ soit $\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $u_3=f^2(e_1)=f(u_2)$ soit $\begin{pmatrix}3\\0\\6\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $u_4=f^3(e_1)=f(u_3)$ soit $\begin{pmatrix}0\\21\\0\\6\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

   On obtient la matrice de passage $P=\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&3&0&21\\0&0&6&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}$ qui est triangulaire avec des termes diagonaux tous non nuls.

   $$\boxed{(u_1,u_2,u_3,u_4)\text{ est une base de }E.}$$

2. On a déjà $f(u_1)=u_2$, $f(u_2)=u_3$ et $f(u_3)=u_4$, il reste à calculer $f(u_4)$.

   On a $f(u_4)$ de matrice $\begin{pmatrix}21\\0\\60\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. On cherche $f(u_4)$ de matrice $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}_{\mathcal{U}}$ soit $\begin{cases}21=x+3z\\0=3y+21t\\60=6z\\0=6t\end{cases}$ donc la matrice de $f(u_4)$ dans $\mathcal{U}$ est $\begin{pmatrix}-9\\0\\10\\0\end{pmatrix}$

   $$\boxed{Mat_{\mathcal{U}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0&-9\\1&0&0&0\\0&1&0&10\\0&0&1&0\end{pmatrix}}$$

3. On fait un Pivot de Gauss ; par exemple on retranche la première colonne aux 3 autres puis la troisième ligne à la seconde:

   $$\det(P)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&-4&-2&-6\\3&-4&-4&0\\1&0&-2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&2&-6\\3&-4&-4&0\\1&0&-2&-2\end{vmatrix}$$

   On développe le déterminant par rapport à la première colonne puis le déterminant 3×3 par rapport à sa première colonne:

   $$\det(P)=4\begin{vmatrix}2&-6\\-2&-2\end{vmatrix}=-64\neq 0$$

4. On calcule l'image de $(f(v_i))$ dans $\mathcal{B}$. :

   $Mat_{\mathcal{B}}(f(v_1))=\begin{pmatrix}3\\9\\9\\3\end{pmatrix}=3v_1$, $Mat_{\mathcal{B}}(f(v_2))=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=-v_2$, $Mat_{\mathcal{B}}(f(v_3))=v_3$, $Mat_{\mathcal{B}}(f(v_4))=-3v_4$

   $$\boxed{D=Mat_{\mathcal{V}}(f)=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}}$$

5. La formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$ soit $D = P^{-1}AP$. Il doit y avoir un lien entre K et P^{-1} . On constate que $KP = I_4$ et donc que $K = P^{-1}$. On a donc $D = KAP$ et donc

$$\boxed{Q = P}$$

6. Notons $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$ et $M'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$

On doit donc résoudre le système $M'(t) = AM(t)$. or .$A = PDP^{-1}$ on a donc $M'(t) = PDP^{-1}M(t)$ soit $P^{-1}M'(t) = DP^{-1}M(t)$

On pose $N(t) = P^{-1}M(t)$. soit en notant $N(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \end{pmatrix}$ On a $\begin{cases} X(t) = \dfrac{x(t) + y(t) + z(t) + u(t)}{8} \\ Y(t) = \dfrac{3x(t) - y(t) - z(t) - 3u(t)}{8} \\ Z(t) = \dfrac{3x(t) + y(t) - z(t) - 3u(t)}{8} \\ T(t) = \dfrac{x(t) - y(t) + z(t) - u(t)}{8} \end{cases}$. En dérivant

on a $\begin{cases} X'(t) = \dfrac{x'(t) + y'(t) + z'(t) + u'(t)}{8} \\ Y(t) = \dfrac{3x'(t) - y'(t) - z'(t) - 3u'(t)}{8} \\ Z(t) = \dfrac{3x'(t) + y'(t) - z'(t) - 3u'(t)}{8} \\ T(t) = \dfrac{x'(t) - y'(t) + z'(t) - u'(t)}{8} \end{cases}$ soit $N'(t) = \begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Z'(t) \\ U'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}M'(t)$.

On a donc $N'(t) = DN(t)$ ce qui donne les 4 équations : $\begin{cases} X'(t) = 3X(t) \\ Y'(t) = -Y(t) \\ Z'(t) = Z(t) \\ U'(t) = -3U(t) \end{cases}$. Il existe 4 constantes $(K_i)_{i=1}^{4}$ tels que :

$\begin{cases} X(t) = K_1e^{3t} \\ Y(t) = K_2e^{-t} \\ Z(t) = K_3e^{t} \\ U(t) = K_4e^{-3t} \end{cases}$

.

On en déduit ensuite $M(t) = PN(t)$ donne : $\begin{pmatrix} x(t) = K_1e^{3t} + K_2e^{-t} + ce^{t} + K_4e^{-3t} \\ y(t) = 3K_1e^{3t} - K_2e^{-t} + K_3e^{t} - 3K_4e^{-3t} \\ z(t) = 3K_1e^{3t} - K_2e^{-t} - K_3e^{t} + 3K_4e^{-3t} \\ u(t) = K_1e^{3t} + K_2e^{-t} - K_3e^{t} - K_4e^{-3t} \end{pmatrix}$

PARTIE 3

1. g est une application linéaire car la dérivation et le produit par une constante sont linéaires.
De plus si $d^{\circ}(Q) \leq n$, $d^{\circ}(XQ) \leq n+1$ et $d^{\circ}\left((X^2-1)Q'\right) \leq n+1$, donc par addition $d^{\circ}(g(P)) \leq n+1$.

On vérifie le terme de degré $n = 1$: Si $P = a_nX^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k$, le terme de degré $n+1$ de $g(P)$ est $nXa_nX^n - X^2(na_nX^{n-1}) = 0$ donc $d^{\circ}\,(g(P)) \leq n$

$$\boxed{g \in \mathcal{L}(E_n)}$$

On cherche l'image de $\mathcal{B}_C$:

- $g(1) = nX$
- pour $j \in [[2, n-1]]$, $g(X^j) = (n-j)X^{j+1} + jX^j$
- $g(X^n) = nX^{n-1}$

La matrice de g dans la base canonique de E_n est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On reconnais la matrice A

2.

1. On se place sur $]-1,1[$. On a l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène :

$$y'(x) + \frac{\lambda - nx}{x^2-1} y(x) = 0$$

Il existe une constante K tel que $\forall x \in]-1,1[\ \ , y(x) = K \exp\left(-\int \frac{\lambda - nx}{x^2-1} dx\right)$

Pour trouver une primitive $\frac{\lambda - nx}{x^2-1}$ on fait une décomposition en éléments simples:

$$\frac{\lambda - nx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda - n}{x-1} - \frac{\lambda + n}{x+1}\right)$$

une primitive est donc

$$\frac{1}{2}((\lambda - n)\ln(|x-1|) - (\lambda + n)\ln(|x+1|))$$

ce qui donne :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, y(x) = K(1-x)^{\frac{n-\lambda}{2}}(1+x)^{\frac{\lambda+n}{2}}}$$

2. Comme toute solution de $\mathcal{E}_\lambda$ est proportionnelle à $y_0 : x \to (1-x)^{\frac{n-\lambda}{2}}(1+x)^{\frac{\lambda+n}{2}}$, il existe des solutions polynômiales non nulles sur $]-1,1[$ si et seulement si y_0 est polynômiale..

   - Si $\frac{n-\lambda}{2}$ et $\frac{\lambda+n}{2}$ sont deux entiers naturels, y_0 est un polynôme.
   - Si $\frac{n-\lambda}{2}$ n'est pas entier . $y_0(x) \sim_1 2^{\frac{\lambda+n}{2}} (1-x)^{\frac{\lambda-n}{2}}$, n'est pas équivalent à un polynôme , donc n'est pas un polynôme.

   On en déduit que y_0 est un polynôme si et seulement si $\frac{n-\lambda}{2}$ et $\frac{\lambda+n}{2}$ sont deux entiers naturels, soit encore $\boxed{\lambda = 2p - n \text{ avec } p \in [[0,n]]}$

3. $g(P_\lambda) = \lambda P_\lambda$ équivaut à :

$$nXP_\lambda(X) - (X^2-1)P'_\lambda(X) = \lambda P_\lambda(X)$$

- Si on se limite à $x \in]-1,1[$:

$$\left(x^2-1\right) P'_\lambda(x) + (\lambda - nx)\, P_\lambda(x) = 0$$

  P_λ est une solution polynômiale non nulle de $\mathcal{E}_\lambda$.
  et donc $\lambda = 2p - n$, $p \in [[0,n]]$ et $P_\lambda(x)$ est proportionnel à $(1-x)^{n-p}(1+x)^p$.

- Réciproquement,un tel polynôme est un polynôme non nul non nul de E tel que sur $]-1,1[$ $nxP_\lambda(x) - (x^2-1)P'_\lambda(x) - xP_\lambda(x) =$.
  Comme $]-1,1[$ est de cardinal infini, la relation est vraie pour les polynômes.

$$\boxed{\exists p \in [[0,n]]\ ,\ \lambda = 2p - n \text{ et } \exists K \neq 0\ ,\ P_\lambda = K(1-X)^{n-p}(1+X)^p}$$

4. Si $\left((1-X)^{n-p}(1+X)^p\right)_{p=0}^n$ est une base de E_n alors dans cette base

$$\boxed{Mat\,(g) = D = \text{diag}(\text{seq}(2p-n), p = 0..n) = \text{diag}(-n, 2-n, 4-n, \cdots n-4, n-2, n)}$$

la famille est une famile de polynômes de degré $\leq n$ qui est de bon cardinal et qui est libre :

- avec le cours récent : les valeurs propres sont 2 à 2 distincts, donc les vecteurs propres forment un système libre.
- ou vérifier directement $\sum a_p(1-X)^{n-p}(1+X)^p = 0 \Rightarrow \forall p\ ,\ a_p = 0$
  - soit par récurrence
  - soit en écrivant que pour $x \neq 1$ $\sum a_p(\dfrac{1+x}{1-x})^p = 0$ ce qui fait un polynôme ayant une infinité de racines.

Comme A est semblable à D, son déterminant est égale à celui de D , donc au produit des termes diagonaux de D : $\det A = \displaystyle\prod_{p=0}^{n}(2p-n)$

- Si n est pair $p = n/2$ est une valeur possible donc $\det(A) = 0$
- Si $n = 2k+1$ est impair on regroupe chaque terme avec son opposé :

$$\det{(A)} = (-1)^{k+1}\left(\prod_{p=0}^{k}(2k+1-2p)\right)^2$$

  on a le produit des impairs de 1 à $2k+1$

$$1.3.\cdots(2k+1) = \frac{(2k+1)!}{2^k k!}$$

$$\boxed{\det(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{k+1}\left(\dfrac{(2k+1)!}{2^k k!}\right)^2 \text{ si } n = 2k+1 \text{ est impair.}\end{cases}}$$

PARTIE 4

1. L'équation différentielle $\mathcal{F}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
   Son équation caractéristique est $r^2 = 1$, de racines 1 et -1.
   On en déduit que l'ensemble des solutions est du type $\forall x \in \mathbb{R} :\ y(x) = A\exp(x) + B\exp(-x)$.
   Ajoutons alors les conditions initiales :
   - pour $y_1\ :\ A + B = 1, A - B = 0$. On trouve que $y_1 = \text{ch}$
   - pour $y_2\ :\ A + B = 0, A - B = 1$. On trouve$y_2 = \text{sh}$.

2.
   Comme $G = \text{Vect}(\mathcal{G})$, il suffit de montrer que $\mathcal{G}$ est une famille libre:

   Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille de réels tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i = 0$:

   Pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\lambda_i \text{ch}(x)^{n-i}\text{sh}(x)^i = 0$,

   On divise par $(\text{ch}(x))^n \neq 0$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\lambda_i \text{th}(x)^i = 0$

   Comme $\text{th}(x)$ prend une infinité de valeurs quand x décrit $\mathbb{R}$, le polynôme $\displaystyle\sum_{i=à}^{n}\lambda_i X^i$ admet une infinité de racines. Il est nuls et donc ses coefficients $(\lambda_i)_{i=0}^n$ sont donc tous nuls

$$\boxed{\mathcal{G} \text{ une base de } G.}$$

3. 1. La dérivation est linéaire.

   Trouvons l'image de la base $(\mathcal{G})$ par Δ : pour tout réel x,

   - $\Delta(g_0)(x) = n(\text{ch}x)^{n-1}(\text{sh}x) = ng_1(x)$: $\Delta(g_0) \in G$.
   - Si $1 \leq k \leq n-1$,$\Delta(g_k)(x) = (n_k)(\text{ch}x)^{n-k-1}(\text{sh}x)^{k+1} + k(\text{ch}x)^{n-k+1}(\text{sh}x)^{k-1} = (n-k)g_{k+1}(x) + kg_{k-1}(x)$ donc $\Delta(g_k) \in G$.
   - $\Delta(g_n)(x) = n(\text{sh}x)^{n--1}(\text{ch}x)$: $\Delta(g_n) \in G$.

   L'image par Δ de la base de G est un famille de G et donc $\Delta(G) \subset G$

   $$\boxed{G \text{ est stable par } \Delta}$$

2. Soit $g_k \in \mathcal{G}$ „ montrons que $g_k \in \text{Vect}\,(\mathcal{F})$:

   Pour tout x réel, d'après le binôme de Newton.

   $$\begin{aligned} g_k(x) &= (\text{ch}x)^{n-k}(\text{sh}x)^k = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^{n-k}(\frac{e^x - e^{-x}}{2})^k \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}e^{ix}e^{(n-k-i)(-x)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{jx}(-1)^{k-j}e^{(k-j)(-x)} \end{aligned}$$

   On a une combinaison linéaire de $e^{(i-(n-k-i)+j-(k-j))x} = e^{(2(i+j)-n)x}$ avec $m = i + j \in [[0, n]]$.

   On a donc $G = \text{Vect}\,(g_k) \subset \text{Vect}\,(\varphi_m)$. Mais G est de dimension $n+1$ et $\text{Vect}\,(\varphi_m)$ de dimension au plus $n+1$. Donc $\text{Vect}\,(\varphi_m)$ est de dimension exactement $n+1$ et les deux sous espaces sont égaux.

   $$\boxed{G = \text{Vect}\,(\varphi_m)_{m=0}^n}$$

   La famille (φ_m) étant une famille génératrice de bon cardinal est une base de G .

3.
   - On a déjà calculé $\delta\,(g_k) = \Delta(g_k) = \begin{cases} ng_1 \text{ si } k = 0 \\ (n-k)g_{k+1} + kg_{k-1} \text{ si } 1 \leq k \leq n-1 \\ ng_{n-1} \text{ si } k = n \end{cases}$. On a dons $S = A$
   - Par dérivation évidente on a : $\delta(\varphi_m) = (2m-n)\varphi_m$.Comme on a une base $S' = \text{diag}\,(2m-n)_{m=0}^n = D$

4. On retrouve alors que

   $$\boxed{A \text{ est semblable à } D}$$

   Avec le dernier chapitre:

   - A est diagonalisable quelque soit $n \geq 2$
   - les valeurs propres de A sont toutes simples et sont les $(2p-n)_{p=0}^n$
   - les sous espaces propres sont des droites. Ces droites sont engendrées par les $X_p = Mat_{(X^i)}\left((1-X)^{n-j}(1+X)^j\right)$