Partie I   Une étude de séries.

I. 1. 1.)

- Sur $]-1,1[$ la série proposée est le développement en série entière de $\log(1+x)$ donc

$$\boxed{R = 1 \text{ et } L(x) = \ln(1+x) \text{ sur }]-1,1[}$$

- En $x=1$, la série $\sum \frac{(-1)^{-1}}{k}$ vérifie le critère spécial des séries alternées (la valeur absolue du terme général décroît vers 0) donc convergente.

$$\boxed{L \text{ est définie sur }]-1,1]}$$

Remarque : c'est même exactement son domaine de définition car elle diverge si $x=-1$

I. 1. 2.) :

- Sur $]-1,1[$ on est sur le disque ouvert de convergence donc la somme de la série est continue . (*On peut aussi utiliser la valeur de la somme)*

- En $x=1$: On sait que si une série entière $\sum a_n x^n$ admet un rayon de convergence $R>0$ et si $\sum a_n R^n$ converge , alors la somme de la série est continue en R (à gauche). Ici $R=1$ et donc L est continue en 1

$$\boxed{L \text{ est continue sur } [0,1]}$$

Pa continuité on a donc : $L(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} L(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$

$$\boxed{L(1) = \ln(2)}$$

I. 2. 1.) Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=1,k\equiv 0[3]}^{3p} a_k + \sum_{k=1,k\equiv 1[3]}^{3p} a_k + \sum_{k=1,,k\equiv 2[3]}^{3p} a_k = \sum_{q=1}^{p} a_{3q} + \sum_{q=0}^{p-1} a_{3q+1} + \sum_{q=0}^{p-1} a_{3q+2}$$

en séparant les entiers k modulo 3.Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3p} a_k &= -\frac{2}{3}\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{q} + \sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{3q+1} + \sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{3q+2} = -\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{q} + \sum_{q=1}^{p}\frac{1}{3q} + \sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{3q+1} + \sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{3q+2} \\
&= -\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{q} + \sum_{k=1}^{3p}\frac{1}{k} \text{ en regroupant tous les entiers modulo 3.} \\
&= \sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k} = \sum_{h=1}^{h=2p}\frac{1}{p+h} = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{h=2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}} \text{ en prenant } h=k-p
\end{aligned}$$

I. 2. 2). La somme précédente est une somme de Riemann de la fonction f sur $[0,2]$:

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{h=1}^{n} f(a+h\frac{b-a}{n}) = \frac{2}{n}\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2h}{n}}$$

On prend la suite extrait des termes paires en posant $n=2p$.
La fonction est continue sur $[0,2]$, La somme de Riemann converge ver l'intégrale , donc aussi la suite extraite.

$$\boxed{\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{h=2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}} = \int_a^b f(t)\,dt = \int_0^2 \frac{dt}{1+t} = \ln(3)}$$

La suite $\sum\limits_{k=1}^{3p} a_k$ converge vers $\ln(3)$, la suite $\sum\limits_{k=1}^{3p+1} a_k = \sum\limits_{k=1}^{3p} a_k + \frac{1}{3p+1}$ converge aussi vers $\ln(3)$ ainsi que la suite $\sum\limits_{k=1}^{3p+2} a_k = \sum\limits_{k=1}^{3p} a_k + \frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+1}$

Les 3 suites extraites convergent vers la même limite $\ln(3)$ et l'ensemble des indices décrit $\mathbb{N}$. Donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers cette limite commune.

$$\boxed{\text{la série } \sum a_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(3)}$$

<u>autre méthode : comparaison série intégrale:</u>$t \rightarrow \dfrac{1}{1+t}$ décroît sur $]-1,+\infty[$ donc en intégrant sur des intervalles de longueur $\dfrac{1}{p}$

$$\int_{k/p}^{(k+1)/p} \frac{dt}{1+t} \leq \frac{1}{p}\frac{1}{1+k/p} \leq \int_{(k-1)/p}^{(k/p} \frac{dt}{1+t}$$

ce qui donne:

$$\int_{1/p}^{2+(1)/p)} \frac{dt}{1+t} \leq \sum_{k=1}^{3p} a_p \leq \int_0^2 \frac{dt}{1+t}$$

d'où le résultat.

<u>variante</u>: pour tout p faire l'encadrement avec $f_p = \dfrac{1}{1+t/p}$.

I. 2. 3.) On a $\cos\left(\dfrac{2k\,\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 3p : \\ -\dfrac{1}{2}\text{si } k = 3p+1 \text{ ou } 3p+2 \end{cases}$ ce qui donne : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\,\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}a_k,$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\,\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ln(3)}$$

I. 3. 1.) Pour $t \in]0,2\pi[$, $S_n(t)$ est la somme partielle d'une suite géométrique de premier terme e^{it} et de raison $e^{i\,t} \neq 1$. :

$$\forall t \in]0,\pi[\ ,\ S_n(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\,t}\right)^k = e^{it}\frac{1-\left(e^{i\,t}\right)^n}{1-e^{i\,t}} = \varphi(t)\ \left[e^{(n+1)\,i\,t} - e^{i\,t}\right]$$

I. 3. 2.) Sur $[\pi,\alpha]$ le dénominateur de φ est C^1 et ne s'annule pas .La fonction φ est donc C^1 sur $[\pi,\alpha]$.

I. 3. 3.) Puisque φ et $t \longmapsto \dfrac{e^{(n+1)\,i\,t}}{i(n+1)}$ sont C^1 sur le segment $[\pi,\alpha]$on peut effectuer une intégration par partie :

$$\int_\pi^\alpha e^{(n+1)\,i\,t}\,\varphi(t)\,dt = \frac{e^{(n+1)\,i\,\alpha}\,\varphi(\alpha) - e^{(n+1)\,i\pi t}\,\varphi(\pi)}{(n+1)\,i} - \int_\pi^\alpha \frac{e^{(n+1)\,i\,t}}{(n+1)\,i}\,\varphi'(t)\,dt$$

φ et φ' sont continues sur un segment donc y sont bornées,

$$\left|\int_\pi^\alpha e^{(n+1)\,i\,t}\,\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2\ \sup\left(|\varphi|\right) + (\alpha-\pi)\ \sup\left(|\varphi'|\right)}{n+1}$$

Le numérateur est constant,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_\pi^\alpha e^{(n+1)\,i\,t}\,\varphi(t)\,dt = 0}$$

I. 3. 4.) Pour $\alpha \in [\pi,2\pi[$, on peut intégrer termes à termes car la somme a un nombre fini de termes :

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_\pi^\alpha e^{\,k\,i\,t}\,dt\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{e^{\,k\,i\,t}}{ki}\right]_\pi^\alpha = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\,k\,i\,\alpha} - (-1)^k}{k}$$

D'après **I. 3. 1.)** on a :

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt = \int_\pi^\alpha e^{(n+1)\,i\,t}\,\varphi(t)\,dt - \int_\pi^\alpha e^{\,i\,t}\,\varphi(t)\,dt$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\,k\,i\,\alpha}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k} + i\int_\pi^\alpha e^{(n+1)\,i\,t}\,\varphi(t)\,dt - i\int_\pi^\alpha e^{\,i\,t}\,\varphi(t)\,dt$$

Quand n tend vers ∞ , $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ tend vers $-\ln(2)$ (**I.1.2)** et $\int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)\,i\,t}\,\varphi(t)\,dt$ tend vers 0 (question précédente) ce qui justifie la convergence de la série et le calcul par passage à la limite :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{k\,i\,\alpha}}{k} = -\ln(2) - i\int_{\pi}^{\alpha} e^{i\,t}\,\varphi(t)\,dt}$$

I. 3. 5.) Pour tout $t \in \left]0, 2\pi\right[$, on a

$$e^{i\,t}\,\varphi(t) = \frac{e^{i\,t}}{e^{i\,t}-1} = \frac{e^{i\,t}}{e^{it/2}\left(e^{i\,t/2}-e^{-it/2}\right)} = \frac{e^{i\,t/2}}{2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\boxed{e^{i\,t}\,\varphi(t) = \frac{e^{i\,t/2}}{2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

I. 3. 6.) On a donc :

$$e^{i\,t}\,\varphi(t) = \frac{1}{2} - i\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

et

$$\int_{\pi}^{\alpha} e^{i\,t}\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\,(\alpha-\pi) - i\,\ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

En séparant parties réelle et imaginaire, on a la convergence des séries et le calcul de leurs sommes : :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\,\alpha)}{k} = -\ln(2) - \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\,\alpha)}{k} = \frac{\pi-\alpha}{2}}$$

Remarque : Pour $\alpha \in]0,\pi[$ il suffit de refaire le même calcul sur $[\alpha,\pi]$ au lieu de le faire sur $[\pi,\alpha]$

En particulier pour $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\,\alpha)}{k} = -\ln(2) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\ln\left(\sqrt{3}\right)$ on retrouve ainsi le résultat de **I. 2. 3)**.

Partie II   Limite d'une intégrale.

II. 1.) g étant bornée on peut poser $M = \sup_{[0,\infty[} |\,g\,|$. Alors pour $x > 0$ et $t \geq 0$ on a $|\,f\,(t)\,g(x\,t)\,| \leqslant M\;|\,f\,(t)|$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, $M\,f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par linéarité) et donc $t \mapsto f\,(t)\,g(x\,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par majoration)

$$\boxed{\widetilde{f}_g(x) \text{ existe pour tout } x > 0}$$

La fonction est continue par théorème de continuité d'une intégrale à paramètre :

- pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto f\,(t)\,g(x\,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$
- pour tout $x > 0$, $t \mapsto f\,(t)\,g(x\,t)$ est continue par morceaux intégrable sur $[0,+\infty[$
- On a domination par $t \mapsto M\;|\,f\,(t)|$, indépendante de x , continue par morceaux intégrable sur $[0,+\infty[$

$$\boxed{\widetilde{f}_g \text{ est continue sur }]0,\infty[}$$

La majoration précédente donne aussi :

$$\forall x > 0,\ \left|\widetilde{f}_g(x)\right| \leqslant \int_0^{\infty} |\,f\,(t)\,g(x\,t)\,|\;dt \leqslant M\int_0^{\infty} |\,f\,(t)\,|\;dt$$

et donc

$$\boxed{\widetilde{f}_g \text{ est bornée sur }]0,\infty[}$$

II. 2. 1.) Si g est la fonction $t \longmapsto e^{i\,t}$, on a les hypothèses, de la question précédente, avec $M = 1$.

Par la relation de Chasles et la définition de la convergence d'une intégrale : $\displaystyle\int_A^{\infty} |\, f\,(t)\,|\; dt = \int_0^{+\infty} |\, f\,(t)\,|\; dt - \int_0^A |\, f\,(t)\,|\; dt \to_{A\to+\infty} 0$

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0, \exists A > 0, 0 \leqslant \int_A^{\infty} |\, f\,(t)\,|\; dt \leqslant \varepsilon}$$

II. 2. 2.) Pour A ainsi fixé, on fait une intégration par partie, sur le segment $[0, A]$:

$$\int_0^A e^{\,i\,x\,t}\, f\,(t)\, dt = \left[\frac{e^{\,i\,x\,t}}{i\,x}\, f\,(t)\right]_{t=0}^{t=A} - \int_0^A \frac{e^{\,i\,x\,t}}{i\,x}\, f\,'(t)\, dt$$

Ainsi

$$\left|\int_0^A e^{\,i\,x\,t}\, f\,(t)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(|\, f\,(A)\,| + |\, f\,(0)\,| + \int_0^A |\, f\,'(t)|\; dt\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \int_0^A e^{\,i\,x\,t}\, f\,(t)\, dt = 0}$$

II. 2. 3.) Soit $\varepsilon > 0$, quelconque fixé.

- Pour cet $\varepsilon > 0$, avec **II. 2. 1).** il existe $A > 0$, tel que $\forall x > 0$, $\displaystyle\left|\int_A^{\infty} e^{\,i\,x\,t}\, f\,(t)\; dt\right| \leqslant \int_A^{\infty} |\, f\,(t)\,|\; dt \leqslant \varepsilon$
- Pour un A ainsi choisi, il existe $X > 0$, tel que $\forall x \geqslant X$, $\displaystyle\left|\int_0^A e^{\,i\,x\,t}\, f\,(t)\, dt\right| < \varepsilon$
- en ajoutant les 2 $\forall x \geqslant x_0$, $\displaystyle\left|\int_0^{\infty} e^{\,i\,x\,t}\, f\,(t)\; dt\right| < 2\varepsilon.$

  En partant de $\varepsilon' \geq /2$:

$$\forall\varepsilon' > 0 \;,\; \exists X \;,\; x \geq X \Longrightarrow \left|\, \widetilde{f}_g(x) \right| \leq \varepsilon'$$

On a donc montré que

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left|\, \widetilde{f}_g(x) \right| = 0}$$

remarque : attention à la double limite . On demande $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{A\to+\infty}\left(\int_A^{\infty} f_x\,(t)\; dt\right)\right)$ *et pas* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\int_A^{\infty} f_x\,(t)\; dt\right)\right)$
.

Si on prend $y = \dfrac{Ax^2}{x^3 + Ax}$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{A\to+\infty}(y)\right) = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$ *et* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}(y)\right) = \lim_{A\to+\infty}(0) = 0.$

On demande $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\int_A^{\infty} f_{\,x}(t)\; dt\right) + \int_0^A f_x(t)dt\right)$ *et pas* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\int_A^{\infty} f_{\,x}(t)\; dt\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^A f_x(t)dt\right)$

Si on prend $y = \dfrac{x}{A} + \dfrac{A}{x}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(y) = +\infty$ *et* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{x}{A}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{A}{x}\right) = 0$

II.3.) Si g est la fonction $t \longmapsto |\sin(t)\,|$, on a les hypothèses de **II. 1).**, avec $M = 1$.

II. 3. 1.) On prend la partie imaginaire de

$$\int_0^{\pi} e^{\,\gamma\,y}\; e^{\,i\,y}\; dy = \left[\frac{e^{\,(\gamma+i)\,y}}{\gamma + i}\right]_{y=0}^{y=\pi} = \frac{1}{\gamma + i}\left[e^{\,(\gamma+i)\,\pi} - 1\right] = \frac{i - \gamma}{\gamma^2 + 1}\left[e^{\,\gamma\,\pi} + 1\right]$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{\pi} e^{\,\gamma\,y}\; \sin(y)\; dy = \frac{e^{\,\gamma\,\pi} + 1}{\gamma^2 + 1}}$$

II. 3. 2.) On a $\displaystyle\widetilde{E}\,(x) = \int_0^{\infty} e^{\,-\,t}\; |\sin(x\,t)\,|\; dt$, intégrale convergente (**II. 1.**) dans laquelle on peut effectuer le changement de variable $(u = x\,t\;)$ qui est C^1 bijectif de $[0, +\infty[$ sur lui même (car $x > 0$)

On obtient une intégrale convergente de même valeur :

$$\boxed{\forall x > 0 \;,\; \widetilde{E}\,(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{\,-\,\frac{u}{x}}\; |\sin(u)\,|\; du}$$

II. 3. 3.) Avec le changement de variable (translation) $v = u - k\pi$, pour tout $x > 0$,
on a
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} \,|\sin(u)|\, du = \int_0^{\pi} e^{-\frac{v+k\pi}{x}} \,|\sin(v)|\, dv = e^{-\frac{k\pi}{x}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{v}{x}} \sin(v)\, dv = e^{-\frac{k\pi}{x}} \theta\left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$\boxed{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} \,|\sin(u)|\, du = e^{-\frac{k\pi}{x}} \theta\left(-\frac{1}{x}\right)}$$

II. 3. 4.) Comme $e^{-\frac{k\pi}{x}} = \left(e^{-\frac{\pi}{x}}\right)^k$, on a une série géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{x}} \in]0,1[$ qui est donc convergente, et
$$\boxed{\forall x > 0 : \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}}}$$

II. 3. 5.) Avec la règle de Chasles, on peut décomposer :
$$\int_0^{(n+1)\pi} e^{-t} \,|\sin(x\,t)|\, dt = \sum_{k=0}^{k=n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \,|\sin(x\,t)|\, dt = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{k=n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} \,|\sin(u)|\, du = \frac{1}{x}\theta\left(-\frac{1}{x}\right) \sum_{k=0}^{k=n} e^{-\frac{k\pi}{x}}$$
on passe à la limite : :
$$\widetilde{E}\,(x) = \frac{1}{x}\theta\left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}}$$
soit :
$$\boxed{\forall x > 0 : \widetilde{E}\,(x) = \frac{x}{x^2+1}\left(\frac{1+e^{-\frac{\pi}{x}}}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}\right)}$$
Quand $x \to \infty$, $e^{-\frac{\pi}{x}} = 1 - \frac{\pi}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et
$$\widetilde{E}\,(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)\left(\frac{2 + o\,(1)}{\frac{\pi}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$$
d'où
$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \widetilde{E}\,(x) = \frac{2}{\pi}}$$

II. 4. 1) Pour tout x réel $\left|\dfrac{\cos(2kt)}{4k^2-1}\right| \leq \dfrac{1}{4k^2-1}$ terme général d'une série convergente ($\dfrac{1}{4k^2-1} \sim \dfrac{1}{4k^2}$ avec $2 >$)
donc la série des fonctions $\sum \dfrac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$,De plus pour tout k la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$:
$$\boxed{h \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}}$$
La fonction $t \longmapsto |\sin(t)|$ est continue, de classe C^1 par morceaux,2π-périodique. La fonction est donc développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
Calculons les coefficients de Fourier de g.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad b_n = 0$, par parité.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(t)| \cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t) \cos(nt)dt$$
  On linéarise l'expression :
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)]\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{-\cos((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{-\cos((n-1)t)}{n-1}\right]_0^{\pi}\right] \end{aligned}$$
  - si n est impair $a_n = 0$

– si n est pair $a_{2k} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k-1}\right] = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{4k^2-1}\right)$

- On a donc :

$$|\sin(t)| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}(g)\cos(2kt) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$$

soit :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}h(t)}$$

Remarque : contrairement à d'autres sujets il faut reconnaître vous même que h est la somme d'une série de Fourier.

II. 4. 2.) On a d'après le calcul précédent pour $x > 0$:

$$\widetilde{f}\,(x) = \int_0^{\infty} f\,(t)\ |\sin(x\,t)|\ dt = \int_0^{\infty} f\,(t)\ \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}h(x\,t)\right]\ dt = \int_0^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}f(t) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\,x\,t)}{4k^2-1}f(t)\right]\ dt$$

où l'on voit apparaître l'intégration termes à termes d'une série des fonctions : .On vérifie les hypothèses :

- Pour tout k , $t \to \frac{\cos(2k\,x\,t)}{4k^2-1}f(t)$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$, car $\left|\frac{\cos(2k\,x\,t)}{4k^2-1}\ f\,(t)\right| \leqslant |\ f\,(t)\,|$ intégrable sur $[0,\infty[$
- pour tout t la série $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\,x\,t)}{4k^2-1}f(t)$ converge simplement vers $t \to \left(\frac{2}{\pi} - |\sin(xt)|\right)f(t)$ continue sur $\mathbb{R}^+$
- La série $\int_0^{\infty}\left|\frac{\cos(2k\,x\,t)}{4k^2-1}f\,(t)\right|\ dt$ converge car $\int_0^{\infty}\left|\frac{\cos(2k\,x\,t)}{4k^2-1}f\,(t)\right|\ dt \leqslant \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty}|\ f\,(t)\,|\ dt \sim \frac{\frac{1}{4}\int_0^{\infty}|\ f\,(t)\,|\ dt}{k^2}$ qui converge car $2 > 1$.
- On a donc par intégration termes à termes :

$$\boxed{\widetilde{f}\,(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f\,(t)\,dt - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty} f\,(t)\ \cos(2k\,x\,t)\,dt \text{ pour tout } x > 0}$$

Passons à la limite par convergence normale :

- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty} f\,(t)\ \cos(2k\,x\,t)\,dt = 0$

  D'après **II. 2. 3.),** comme f est C^1 on a : $\lim_{x\to\infty}\left(f(t)e^{ixt}\right)dt = 0$, donc en prenant la partie réelle $\lim_{x\to\infty}(f(t)\cos(xt)\,dt = 0$

  Si x tend vers $+\infty$, $2kx$ tend vers $+\infty$ (car $k > 0$) et l'intégrale est majorée par $\int_0^{\infty}|f\,(t)|\,dt$ et donc $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty} f\,(t)\ \cos(2k\,x\,t)$
- La série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$:

  $$\left|\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty} f\,(t)\ \cos(2k\,x\,t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty}|\ f\,(t)\,|\ dt\ \begin{cases} \text{indépendant de } x \\ \sum\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty}|\ f\,(t)\,|\ dt \text{ converge}\end{cases}$$

- On peut donc dire que la limite de la série est la série des limites :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\widetilde{f}\,(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f\,(t)\,dt}$$

Ce qui est conforme au résultat obtenu pour E.car $\int_0^{\infty} e^{-t}dt = 1$

II. 4. 3. 1.)

- On effectue le changement de variable C^1 $u = x\,t$ dans l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_{\beta}^{\delta}|\sin(x\,t)|\ dt = \frac{1}{x}\int_{\beta x}^{\delta x}|\sin(u)|\ du$$

- $\dfrac{\beta\, x}{\pi}$ et $\dfrac{\delta\, x}{\pi}$ sont deux réels positifs et pour $x > \dfrac{\pi}{\delta-\beta}$ on a $\dfrac{\delta\, x}{\pi} - \dfrac{\beta\, x}{\pi} = \dfrac{(\delta-\beta)\, x}{\pi} > 1$ et on a donc $p = E\left(\dfrac{\beta\, x}{\pi}\right) < E\left(\dfrac{\delta\, x}{\pi}\right) = q$

$$p \leqslant \frac{\beta\, x}{\pi} < p+1 \leq q \leqslant \frac{\delta\, x}{\pi} < q+1$$

Comme $|\sin(u)| \geq 0$ on en déduit :

$$\int_{(p+1)\,\pi}^{q\pi} |\sin(u)|\, du \leqslant \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)|\, du \leqslant \int_{p\,\pi}^{(q+1)\,\pi} |\sin(u)|\, du$$

Or si k est entier on a en posant $v = u - k\pi$:

$$\int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} |\sin(u)|\, du = \int_0^{\pi} |\sin(v)|\, dv = \int_0^{\pi} \sin(v)\, dv = 2$$

et donc pour n et N entiers :

$$\int_{n\,\pi}^{N\pi} |\sin(u)|\, du = \sum_{k=n}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\, du = 2(N-n)$$

d'où l'encadrement:

$$\boxed{\forall x > \frac{\pi}{\delta-\beta}\ ,\ \frac{2}{x}(q-p-1) \leqslant F(x) \leqslant \frac{2}{x}(q-p+1)}$$

Mais par définition des parties entières : $\dfrac{\beta\, x}{\pi} - 1 < p \leqslant \dfrac{\beta\, x}{\pi}$ et $\dfrac{\delta\, x}{\pi} < q \leqslant \dfrac{\delta\, x}{\pi}$ ce qui donne pour $x > \dfrac{\pi}{\delta-\beta}$

$$\frac{2}{x}\left(\frac{\delta\, x}{\pi} - \frac{\beta\, x}{\pi} - 2\right) \leqslant F(x) \leqslant \frac{2}{x}\left(\frac{\delta\, x}{\pi} - \frac{\beta\, x}{\pi} + 2\right)$$

Comme $x \to \infty$ on peut supposer la condition $x > \dfrac{\pi}{\delta-\beta}$ vérifiée et donc par encadrement

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{2}{\pi}\,(\delta-\beta)}$$

II. 4. 3. 2).

- Si f est une fonction en escalier et J un segment, alors il existe une subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de J telle que f soit constante égale à y_k sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ .et donc

$$\widetilde{f}\,(x) = \int_J f\,(t)\,|\sin(x\,t)|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,(t)\,|\sin(x\,t)|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\sin(x\,t)|\,dt$$

On a un nombre fini (et indépendant de x) de termes dans la $\sum$. Par linéarité

$$: \lim_{x\to\infty} \widetilde{f}\,(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} y_k \frac{2}{\pi}\,(x_{k+1}-x_k) = \frac{2}{\pi} \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} y_k\,(x_{k+1}-x_k)$$

or

$$\int_J f\,(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} y_k = \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} y_k\,(x_{k+1}-x_k)$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \widetilde{f}\,(x) = \frac{2}{\pi}\int_J f\,(t)\,dt}$$

- Si f est continue par morceaux sur J un segment, on peu approcher f uniformément sur ce segment par des factions en escalier :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \varphi \text{ en escalier },\ \forall x \in J\ ,\ |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

On décompose alors

$$\left|\widetilde{f}(x)-\frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right|\leq\left|\widetilde{f}(x)-\varphi(x)\right|+\left|\widetilde{\varphi}(x)-\frac{2}{\pi}\int_J\varphi(t)\,dt\right|+\left|\frac{2}{\pi}\int_J\varphi(t)\,dt-\frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right|$$

par définition de φon a pour tout $x>0$:

$$\left|\widetilde{f}(x)-\frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right|\leq\varepsilon+\left|\widetilde{\varphi}(x)-\frac{2}{\pi}\int_J\varphi(t)\,dt\right|+\frac{2}{\pi}\varepsilon$$

φ étant en escalier le terme du milieu est majoré par ε pour x assez grand :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists X\ ,\ x>X\Rightarrow\left|\widetilde{f}(x)-\frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right|\leq\left(2+\frac{2}{\pi}\right)\varepsilon$$

En prenant $\varepsilon=\varepsilon'/\left(2+\dfrac{2}{\pi}\right)$:

$$\forall\varepsilon'>0\ ,\ \exists X\ ,\ x>X\Rightarrow\left|\widetilde{f}(x)-\frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right|\leq\varepsilon'$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\widetilde{f}\ (x)=\frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt}$$

- Si f est continue par morceaux sur $J=[0,\infty[$, on reprend le raisonnement de la question **II. 2.)** avec un A suffisamment grand pour que $\displaystyle\int_A^{\infty}|\,f(t)\,|\ dt\leqslant\varepsilon$.
Alors pour $x>0$

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{f}\ (x)-\frac{2}{\pi}\int_{[0,\infty[}f(t)\,dt\right| &= \left|\int_0^{\infty}\left(f(t)\ |\sin(x\,t)\,|\ -\frac{2}{\pi}f(t)\right)\ dt\right|\\ &\leq \left|\int_0^{A}\left(f(t)\ |\sin(x\,t)\,|\ -\frac{2}{\pi}f(t)\right)\ dt\right|+\left|\int_A^{\infty}\left(f(t)\ |\sin(x\,t)\,|\ -\frac{2}{\pi}f(t)\right)\ dt\right|\end{aligned}$$

avec :

$$\left|\int_A^{\infty}\left(f(t)\ |\sin(x\,t)\,|\ -\frac{2}{\pi}f(t)\right)\ dt\right|\leq\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\int_A^{+\infty}|f(t)dt|\leq\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\varepsilon$$

et en appliquant le résultat précédent au segment $J=[0,A]$:

$$\exists X\ ,\ x>X\Rightarrow\left|\int_0^{A}\left(f(t)\ |\sin(x\,t)\,|\ -\frac{2}{\pi}f(t)\right)\ dt\right|\leq\varepsilon$$

On a donc :

$$\exists X\ ,\ x>X\Rightarrow\left|\widetilde{f}\ (x)-\frac{2}{\pi}\int_{[0,\infty[}f(t)\,dt\right|\leq(2+\frac{2}{\pi})\varepsilon$$

Pour $\varepsilon'>0$ on prend $\varepsilon=\varepsilon'/(2+\dfrac{2}{\pi})$ et on fini comme au point précédent.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\widetilde{f}\ (x)=\frac{2}{\pi}\int_{[0,\infty[}f(t)\,dt}$$