Calculatrices autorisées

Notations.

- Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$.
- On note $[|1,n|]$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$.
- On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
  - Le produit scalaire des deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est noté $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
  - $\|x\|$ désigne la norme du vecteur x.
  - Soient X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des composantes de x et y dans $\mathcal{B}$, le produit ${}^tXY$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et son unique coefficient est $(x|y)$. On écrira $(x|y) = {}^tXY$ qui est le produit scalaire canonique des matrices X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes.
- L'écriture $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.
- On note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A.

- $S_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, on note s l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ de matrice S relativement à $\mathcal{B}$.
  Si x est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de matrice X relativement à $\mathcal{B}$. On a ${}^tXSX = (x|s(x))$.
- $S_n^+(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices S symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tXSX \geq 0$
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices S symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \neq 0 \Rightarrow {}^t XSX > 0$
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes.
- $O(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On note $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans cet ordre.

Objectifs.

Dans le problème, veut étudier quelques propriétés des éléments de $S_n^+(\mathbb{R})$ et de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et des endomorphismes symétriques associés.
Dans la première partie, on traite deux exemples et on démontre une propriété de compacité d'une partie de $\mathbb{R}^n$ liée au signe des valeurs propres d'un endomorphime symétrique.
Dans les deux parties suivantes, on définit les ensembles S_n^+ et S_n^{++} et on démontre différentes propriétés de leurs éléments : caractérisation par le signe des valeurs propres, racine carrée, propriété de la trace.
Dans la dernière partie, on fait établir des inégalités vérifiées par les endomorphismes symétriques associés aux matrices de S_n^{++}.
Les parties 3 et 4 sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Etude de compacité.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit s un endomorphisme **symétrique** de $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / \ (x|s(x)) = 1\}$.

I.1. Dans cette question, on suppose $n = 2$. On considère le plan euclidien muni du repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ où O est un point du plan. A tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 \in \mathbb{R}^2$, on associe le point M du plan de coordonnées (x_1, x_2) dans le repère $\mathcal{R}$. On note σ l'ensemble des points du plan ainsi associés aux vecteurs de Σ. Soit S la matrice de l'endomorphisme s relativement à la base $\mathcal{B}$.

I.1.1. On suppose que $S = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de S. Pour $x = x_1e_1 + x_2e_2 \in \mathbb{R}^2$, calculer le produit scalaire $(x|s(x))$. Montrer que σ est une ellipse. dont on donnera une équation réduite. Tracer cette ellipse dans le plan euclidien muni du repère $\mathcal{R}$.

I.1.2. On suppose que $S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de S. Déterminer l'ensemble σ et tracer cet ensemble dans le plan euclidien muni du repère $\mathcal{R}$.

I.2. On suppose n entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres réelles (distinctes ou confondues) de s, chaque valeur propre figurant avec son ordre de multiplicité. On veut montrer que Σ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tous les λ_i sont > 0. On ordonne les λ_i dans l'ordre croissant $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et on considère une base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de s avec $\forall i \in [|1, n|], \ s(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

I.2.1. On suppose $\lambda_1 > 0$. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \in \mathbb{R}^n$, calculer $(x|s(x))$. Montrer que Σ n'est pas vide. Montrer que Σ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

– complément 5/2 : Montrer que Σ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. On pourra étudier l'application $x \mapsto (x|s(x))$.

I.2.2. On suppose que Σ est une partie bornée non vide de $\mathbb{R}^n$.

I.2.2.1 Montrer que $\lambda_n \leq 0$ est impossible.

I.2.2.2 On suppose $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_n > 0$ et, pour tout $r \in \mathbb{R}$, on considère le vecteur défini par $x_r = r\varepsilon_1 + \sqrt{\dfrac{1 - \lambda_1 r^2}{\lambda_n}}\varepsilon_n$.

Montrer que $x_r \in \Sigma$. Calculer $\|x_r\|^2$ et déterminer sa limite quand $r \to +\infty$. En déduire une contradiction avec l'hypothèse Σ borné.

2. Racine carrée d'une matrice de S_n^+.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres de S comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [|1, n|], \ SX_i = \lambda_i X_i$.

II.1. On veut montrer que $S \in S_n^+$ si et seulement si $\forall i \in [|1, n|], \ \lambda_i \geq 0$.

II.1.1. On suppose que $S \in S_n^+$. Montrer que $\forall i \in [|1, n|], \ \lambda_i \geq 0$.

II.1.2. On suppose que $\forall i \in [|1, n|], \ \lambda_i \geq 0$. Montrer que $S \in S_n^+$.

On montre de même, et on admettra, qu'une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ appartient à S_n^{++} si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

II.1.3. On suppose que $S \in S_n^{++}$ et donc que $\forall i \in [|1,n|],\ \lambda_i > 0$. Montrer que S est inversible et que $S^{-1} \in S_n^{++}$.

II.2. On suppose que $S \in S_n^+$.

II.2.1. Soient $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Calculer Δ^2.
On suppose que $N \in S_n^+$ vérifie $N^2 = D$. On note $(C_1, \ldots, C_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i C_i$ une matrice propre de N et $\mu \in \mathbb{R}^+$ tels que $NY = \mu Y$. Montrer que $\forall i \in [|1,n|],\ \mu^2 y_i = \lambda_i y_i$ puis $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$. En déduire $N = \Delta$.

II.2.2. Soit $U \in O(n)$ telle que $S = UD\,{}^tU$. Déterminer une matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$. Montrer que T est unique.
On notera $T = \sqrt{S}$ l'unique matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$.

II.3. Une détermination de $\sqrt{S}$. On suppose que $S \in S_n^+$ et que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S. On note $0 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_p$ les valeurs propres **distinctes** de S. Pour $k \in [|1,p|]$, on définit les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $\mu_1, \ldots, \mu_p$ par :

$$\forall k \in [1,p|],\ \forall a \in \mathbb{R},\ L_k(a) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{a-\mu_j}{\mu_k-\mu_j}$$

II.3.1. Pour $i \in [|1,n|]$, calculer $L_k(S)X_i$ en distinguant les cas $\mu_k = \lambda_i$ et $\mu_k \neq \lambda_i$ (on rappelle que les X_i définis au début de la partie **2** appartiennent à une base orthonormale de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [|1,n|],\ SX_i = \lambda_i X_i$).

II.3.2. Soit P le polynôme de degré $\leq p-1$, à coefficients réels tel que $\forall k \in [|1,p|],\ P(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$. Exprimer P comme une combinaison linéaire des polynômes L_k. Calculer $P(S)X_i$ et en déduire que $P(S) \in S_n^+$. Montrer que $P(S) = \sqrt{S}$.

II.3.3. En appliquant les questions précédentes, on prend $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $S \in S_3^+$.
Exprimer $\sqrt{S}$ comme une combinaison des matrices S et $I_3 = \operatorname{diag}(1,1,1)$.

3. Une propriété de la trace des matrices de S_n^+.

III.1. Soit $S \in S_n^+$.

III.1.1. On considère la matrice $\delta = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\forall i \in [|1,n|],\ \alpha_i \geq 0$. Soit $V = (v_{i,j}) \in O(n)$. Montrer que $\operatorname{tr}(\delta V) \leq \operatorname{tr}(\delta)$.

III.1.2. En déduire que pour tout $U \in O(n)$, on a $\operatorname{tr}(SU) \leq \operatorname{tr}(S)$.

III.2. Réciproque de la propriété **III.1**. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall U \in O(n),\ \operatorname{tr}(AU) \leq \operatorname{tr}(A)$. On veut montrer que $A \in S_n^+$.

III.2.1. Un lemme technique. Soient a, b, θ des réels. Montrer qu'il existe un réel φ indépendant de θ tel que $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$.
En déduire que l'inégalité "$\forall \theta \in \mathbb{R},\ a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \leq a$" entraîne $b = 0$.

III.2.2. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour p et q entiers tels que $1 \leq p < q \leq n$, on note Π le plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_p et e_q. Soit u l'endomorphisme orthogonale de $\mathbb{R}^n$ telle que u induit sur le plan Π, orienté par la base (e_p, e_q), la rotation d'angle θ et telle que u induit l'identité sur l'orthogonal de Π.
Ecrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$. Calculer $\operatorname{tr}(AU)$. En déduire que $A \in S_n(\mathbb{R})$.

III.2.3. D'après **III.2.2** la matrice A est symétrique. On note l l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. On considère une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ formée de vecteurs propres de l. Pour $i \in [|1, n|]$, on notera $l(v_i) = \beta_i v_i$. On suppose qu'une valeur propre de l est strictement négative et on ordonne la base $\mathcal{V}$ pour que $\beta_1 < 0$. Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ définie sur la base $\mathcal{V}$ par $u(v_1) = -v_1$ et pour $i \neq 1$, $u(v_i) = v_i$. En notant U la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$, montrer que l'inégalité $\mathrm{tr}(AU) \leq \mathrm{tr}(A)$ conduit à une impossibilité et en déduire que $A \in S_n^+$.

4. Des inégalités remarquables.

Soit $S \in S_n^{++}$ et soit $T \in S_n^{++}$ telles que $T^2 = S$. On note s et t les automorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et T relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. Soient s^{-1} et t^{-1} les applications réciproques de s et t. On note $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les n valeurs propres de s.

IV.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité

$$(1) \qquad (t(x)|t^{-1}(x))^2 \leq (s(x)|x)(s^{-1}(x)|x)$$

A quelle condition sur x a-t-on égalité ?

IV.2. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall a \in \mathbb{R},\ P(a) = a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)a + \lambda_1 \lambda_n$$

Pour chaque $i \in [|1, n|]$, déterminer le signe de $P(\lambda_i)$.
Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $v = -P(s) \circ s^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tel que $s(x) = \lambda_i x$. Calculer $v(x)$ et montrer que x est vecteur propre de v. En déduire que la matrice V de v relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie $V \in S_n^+$.

IV.3. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ Q(a) = (s(x)|x)a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2 a + (s^{-1}(x)|x)\lambda_1 \lambda_n$$

Déterminer le signe de $Q(0)$ et celui de $Q(1)$. En déduire l'inégalité

$$(2) \qquad (s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n} \|x\|^4$$

IV.4. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_n$. Soient v_1 et v_n des vecteurs de norme 1 tels que $s(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $s(v_n) = \lambda_n v_n$. Soit $x = v_1 + v_n$. Calculer les produits scalaires $(s(x)|x)$ et $(s^{-1}(x)|x)$. Montrer que le vecteur x vérifie l'égalité dans (2).