I. Oscillations d'un système linéaire

1. Si $A.x = 0$ alors $\langle Ax, x\rangle = 0$ or $\langle Ax, x\rangle > 0$ pour x non nul. On doit donc avoir $x = 0$ d'où $\ker(A) = \{0\}$ c'est-à-dire A est injective donc inversible.

2. $\langle A^{-1}x, y\rangle = \langle A^{-1}x, AA^{-1}y\rangle = \langle AA^{-1}x, A^{-1}y\rangle = \langle x, A^{-1}y\rangle$.

   L'endomorphisme associé à A^{-1} est ainsi symétrique pour le produit scalaire canonique donc sa matrice, A, dans la base canonique, qui est orthonormée, est symétrique.

3. $(x, y)_A = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle Ay, x\rangle = (y, x)_A$: $(.,.)_A$ est symétrique.

   Comme le produit est trivialement linéaire à droite c'est donc une forme bilinéaire symétrique.

$$\begin{aligned}(E(x), y)_A &= \left(A^{-1}Kx, y\right)_A = \left\langle AA^{-1}Kx, y\right\rangle = \langle Kx, y\rangle = \langle x, Ky\rangle \\ &= \langle Ky, x\rangle = \left\langle AA^{-1}Ky, x\right\rangle = \left(A^{-1}Ky, x\right)_A \\ &= (E(y), x)_A = (x, E(y))_A\end{aligned}$$

4. Ainsi E est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $(,.)_A$. Il existe donc une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ (orthonormée pour ce produit scalaire) telle que $E(e_i) = \lambda_i e_i$ c'est-à-dire $A^{-1}.K.e_i = \lambda_i e_i$.

   De plus $(E(e_i), e_i)_A = (\lambda_i e_i, e_i)_A = \lambda_i (e_i, e_i)_A = \lambda_i N_A(e_i)^2$ où N_A est la norme associée au produit scalaire $(,.)_A$ et on a vu que

   $(E(e_i), e_i)_A = \langle Ke_i, e_i\rangle$ avec $\langle Ke_i, e_i\rangle > 0$ par hypothèse.

   Ainsi on doit avoir $\lambda_i = \dfrac{\langle K.e_i, e_i\rangle}{N_A(e_i)^2} > 0$ pour tout i.

5. Le système (1) est équivalent à $x''^{-1}.K.x(t) = -E(x(t))$.

   Si on décompose $x(t)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ définie ci-dessus,

   $x(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i(t)e_i$, le système s'écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i''(t)e_i = -\sum_{i=1}^{n} u_i(t)E(e_i) = -\sum_{i=1}^{n} u_i(t)\lambda_i e_i$.

   En identifiant les composantes on en déduit que (1) est équivalent aux n équations scalaires $u_i''(t) = -\lambda_i u_i(t)$, i variant entre 1 et n.

   Comme on a $\lambda_i > 0$ les solutions de $u_i''(t) = -\lambda_i u_i(t)$ sont les fonctions $a_i \cos\left(t\sqrt{\lambda_i}\right) + b_i \sin\left(t\sqrt{\lambda_i}\right)$ donc les solutions de (1) sont les fonctions telles qu'il existe $2n$ scalaires $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ avec

   $x(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\left(t\sqrt{\lambda_i}\right) + b_i \sin\left(t\sqrt{\lambda_i}\right)$.

6. C'est une question de cours.

   Comme $(,.)_A$ est bilinéaire sur un espace de dimension finie la dérivée de $t \mapsto (x(t), y(t))_A$ est $(x'(t), y(t))_A + (x(t), y'(t))_A$ d'où le résultat

   $\dfrac{d}{dt}\langle A.x(t), y(t)\rangle = \langle A.x'(t), y(t)\rangle + \langle A.x(t), y'(t)\rangle$.

7. $T(x')$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec, en utilisant la question ci-dessus,

$$\begin{aligned}\frac{dT(x')}{dt}(t) &= \frac{1}{2}\langle A.x''(t), x'(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle A.x'(t), x''(t)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle A.x''(t), x'(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle x'(t), A.x''(t)\rangle \\ &= \langle A.x''(t), x'(t)\rangle = -\langle K.x(t), x'(t)\rangle\end{aligned}$$

   La question ci-dessus reste valide pour la dérivée de $\langle K.x(t), y(t)\rangle$ donc, avec les mêmes calculs, $\dfrac{d}{dt}\langle K.x(t), x(t)\rangle = \langle K.x(t), x'(t)\rangle$.

   On a donc $\dfrac{dT(x') + U(x)}{dt}(t) = 0$ on en déduit que la fonction

   $t \mapsto (T(x') + U(x))(t)$ est constante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

   II. Résultats intermédiaires

8. Le changement de variable $u = \cos(t)$ donne

$$\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k \sin(t)dt = \int_1^{-1} \left(\frac{1+u}{2}\right)^k (-du) = \left[\frac{(1+u)^{k+1}}{2^k(k+1)}\right]_{-1}^1$$
$$= \frac{2}{k+1}$$

En raison de la periodicité et de la parité on a
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k dt = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k dt$$
De plus $0 \leq \sin(t) \leq 1$ pour $t \in [0,1]$ donc

$$1 = c_k \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k dt = 2c_k \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k dt$$
$$\geq 2c_k \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k \sin(t)dt = \frac{4c_k}{k+1}$$

Ainsi $c_k \leq \dfrac{k+1}{4}$.

9. Pour $t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ on a $-1 \leq \cos(t) \leq \cos(\varepsilon)$ donc
$$R_k(t) = c_k \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k \leq \frac{k+1}{4}\left(\frac{1+\cos(\varepsilon)}{2}\right)^k$$
d'où $d_k(\varepsilon) \leq \dfrac{k+1}{4}\left(\dfrac{1+\cos(\varepsilon)}{2}\right)^k$.

Comme on a $0 \leq \left(\dfrac{1+\cos(\varepsilon)}{2}\right)^k < 1$ on en déduit $\lim\limits_{k\to+\infty} d_k(\varepsilon) = 0$.

10. Le changement de variable $t_1 = u - t$ et la périodicité donnent

$$\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt = \int_u^{u-2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)(-dt_1)$$
$$= \int_{u-2\pi}^{u} R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1 = \int_0^{2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1$$

Ainsi

$$\delta_k(u) = \int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt - h(u)$$
$$= \int_0^{2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)dt - h(u)\int_0^{2\pi} R_k(t_1)dt_1$$
$$= \int_0^{2\pi} R_k(t_1)\left(h(u-t_1) - h(u)\right)dt_1$$

- avec $|h(u-t_1) - h(u)| \leq \|h'\||t_1] \leq \|h'\|\varepsilon$ pour $t_1 \in [0,\varepsilon]$ en utilisant l'inégalité des accroissement finis
- $|h(u-t_1) - h(u)| \leq 2\|h\|$ pour $t_1 \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$
- $|h(u-t_1) - h(u)| = |h(u-t_1+2\pi) - h(u)| \leq \|h'\||2\pi - t_1] \leq \|h'\|\varepsilon$ pour $t_1 \in [2\pi - \varepsilon, 2\pi]$

Donc, en posant $\rho_{k,u}(t_1) = R_k(t_1)\,|h(u-t_1) - h(u)|$,

$$\|\delta_k(u)\| \leq \int_0^{\varepsilon} \rho_{k,u}(t_1)dt_1 + \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \rho_{k,u}(t_1)dt_1 + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} \rho_{k,u}(t_1)dt_1$$
$$\leq \int_0^{\varepsilon} R_k(t_1)\|h'\|\varepsilon dt_1 + \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} d_k(\varepsilon)2\|h\|dt_1 + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1)\|h'\|\varepsilon dt_1$$
$$\leq \int_0^{2\pi} R_k(t_1)\|h'\|\varepsilon dt_1 + \int_0^{2\pi} d_k(\varepsilon)2\|h\|dt_1 = \|h'\|\varepsilon + 2\pi d_k(\varepsilon)2\|h\|$$

III. Un théorème ergodique

11. Par la question I, on sait déjà que $x(t) = \sum_{i=1}^{2} a_i \cos\left(t\sqrt{\lambda_i}\right) + b_i \sin\left(t\sqrt{\lambda_i}\right)$.

Si $a_i = b_i = 0$, il suffit de poser $c_i = 0$ et choisir arbitrairement φ_i. Si $(a_i, b_i) \neq (0,0)$, soit $c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ et φ_i défini par

$$\cos(\varphi_i) = \frac{a_i}{c_i} \qquad \sin(\varphi_i) = \frac{-b_i}{c_i}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} a_i \cos\left(t\sqrt{\lambda_i}\right) + b_i \sin\left(t\sqrt{\lambda_i}\right) &= c_i\left(\cos\left(t\sqrt{\lambda_i}\right)\cos(\varphi_i) - \sin\left(t\sqrt{\lambda_i}\right)\sin(\varphi_i)\right) \\ &= c_i \cos\left(t\sqrt{\lambda_i} + \varphi_i\right) \end{aligned}$$

ce qui correspond au résultat.

12. Soit (θ_1, θ_2) un élément de $\mathbb{R}^2$. Soit k_i la partie entière de $\frac{\theta_i}{2\pi}$. Comme $\alpha_i = \theta_i - 2k_i\pi \in [0, 2\pi]$ et que $f(\theta_1,\theta_2) = f(\alpha_1,\alpha_2)$, on obtient que $f(\mathbb{R}^2) = f(K)$ où K est le compact $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. f étant continue, l'image du compact$K$ est bornée et les bornes sont atteintes; ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}^k$ et son maximum est atteint sur K.

13. Le terme de droite de l'inégalité est:

$$d = (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\theta_1 j} d\theta_1)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\theta_2 \ell} d\theta_2)$$

Si j (resp ℓ) est non nul, la première (resp deuxième) intégrale est nulle; ainsi le terme de droite est nul si $(j,\ell) \neq (0,0)$ et vaut 1 si $j = \ell = 0$.

   1.
   2. $j = \ell = 0$: la fonction f est constante et vaut 1. Ainsi pour tout T:

   $$\int_0^T f\circ\theta(t)dt = 1$$

   ce qui permet de vérifier le théorème ergodique dans ce cas précis.

   3. $(j,\ell) \neq (0,0)$: On vérifie par contraposition que $j\sqrt{\lambda_1} + \ell\sqrt{\lambda_2}$ est non nul. Si cette quantité est nulle, j et ℓ sont simultanément non nuls, d'où:

   $$j\sqrt{\lambda_1} + \ell\sqrt{\lambda_2} = 0 \Longrightarrow \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}} = -\frac{j}{\ell} \in \mathbb{Q}$$

   comme par hypothèse, $\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}}$ n'est pas un rationnel,$j\sqrt{\lambda_1} + \ell\sqrt{\lambda_2} \neq 0$.

   $$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T f\circ\theta(t)dt &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{i(j(t\sqrt{\lambda_1}+\varphi_1)+\ell(t\sqrt{\lambda_2}+\varphi_2))}dt \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i(j\varphi_1+\ell\varphi_2)}}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{i(j\sqrt{\lambda_1}+\ell\sqrt{\lambda_2})t}dt \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i(j\varphi_1+\ell\varphi_2)}}{Ti(j\sqrt{\lambda_1}+\ell\sqrt{\lambda_2})}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i(j\sqrt{\lambda_1}+\ell\sqrt{\lambda_2})T} - 1\right)}_{\text{de module borné par 2}} = \frac{g(T)}{T} \end{aligned}$$

   où g est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi:

   $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\circ\theta(t)dt = 0 = (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\theta_1 j}d\theta_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\theta_2\ell}d\theta_2$$

   ce qui prouve le théorème ergodique dans ce second cas.

14. Par définition de R_k,en utilisant les exponentielles complexes, on obtient:

$$R_k(u-\theta_1) = \frac{c_k}{2^k}\left(2 + \mathrm{e}^{iu}\mathrm{e}^{-i\theta_1} + \mathrm{e}^{-iu}\mathrm{e}^{i\theta_1}\right)^k$$

En développant cette expression, on obtient un polynôme trigonométrique en e^{iu} de degré au plus k soit:

$$R_k(u-\theta_1) = \sum_{j=-k}^{k} \mathrm{e}^{iju}\alpha_j(\theta_1)$$

où chaque $\alpha_j(\theta_1)$ est un polynôme trigonométrique en $\mathrm{e}^{i\theta_1}$. De même $R_k(v-\theta_k) = \sum_{j=-\ell}^{\ell} \mathrm{e}^{i\ell v}\alpha_\ell(\theta_2)$. Par linéarité des intégrales , on obtient alors après produit que:

$$f_k(u,v) = \sum_{-k\leq j,\ell\leq k} \mathrm{e}^{iju}\mathrm{e}^{i\ell v}\underbrace{(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_j(\theta_1)\alpha_\ell(\theta_2)f(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2)}_{a_{j,\ell}}$$

Soit $\Phi(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\circ\theta(t)dt - (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2$. L'application Φ est linéaire (l'intégration sur un segment et le passage à la limite sont des opérations linéaires). Comme $f_k$est une combinaison linéaire de fonctions étudiées dans la question précédente pour lesquelles ϕ s'annule, il en est de même de f_k: f_k vérifie donc le théorème ergodique.

15. Par parité de de la fonction R_k, on a

$$\int_0^{2\pi} R_k(u-\theta_1)d\theta_1 = \int_0^{2\pi} R_k(\theta_1-u)d\theta_1 = \int_u^{2\pi+u} R_k(t)dt$$

puis par périodicité de la fonction R_k

$$\int_0^{2\pi} R_k(u-\theta_1)d\theta_1 = \int_0^{2\pi} R_k(t)dt = 1$$

Ainsi:

$$f(u,v) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_k(u-\theta_1)R_k(v-\theta_2)f(u,v)d\theta_1 d\theta_2\cdot$$

En écrivant $f(\theta_1,\theta_2)-f(u,v) = f(\theta_1,\theta_2)-f(u,\theta_2)+f(u,\theta_2)-f(u,v)$, on obtient:

$$f_k(u,v)-f(u,v) = J_1+J_2$$

avec

$$J_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_k(u-\theta_1)R_k(v-\theta_2)\left(f(\theta_1,\theta_2)-f(u,\theta_2)\right)d\theta_1 d\theta_2$$
$$J_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_k(u-\theta_1)R_k(v-\theta_2)\left(f(u,\theta_2)-f(u,v)\right)d\theta_1 d\theta_2\cdot$$

Par utilisation de la définition de l'intégrale double donnée dans l'énoncé , on peut écrire :

$$J_1 = \int_0^{2\pi} R_k(v-\theta_2)\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} R_k(u-\theta_1)\left(f(\theta_1,\theta_2)-f(u,\theta_2)\right)d\theta_1\right)}_{A(\theta_2)}d\theta_2$$

On remarque alors que $A(\theta_2) = \int_0^{2\pi} R_k(u-\theta_1)f(\theta_1,\theta_2)d\theta_2 - f(u,\theta_2)$. En appliquant la question 10 à la fonction $h(u) = f(u,\theta_2)$, $2\pi-$ périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme application partielle de f qui est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$, on a la majoration suivante:

$$|A(\theta_2)| \leq 2 \parallel \frac{\partial f}{\partial\theta_1} \parallel \varepsilon + 4\pi \parallel f \parallel d_k(\varepsilon)\cdot$$

Par inégalité de la moyenne , on a alors:

$$|J_1| \leq \int_0^{2\pi} R_k(v-\theta_2)\left(2 \parallel \frac{\partial f}{\partial\theta_1} \parallel \varepsilon + 4\pi \parallel f \parallel d_k(\varepsilon)\right)d\theta_1 = 2 \parallel \frac{\partial f}{\partial\theta_1} \parallel \varepsilon + 4\pi \parallel f \parallel d_k(\varepsilon)$$

De même:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{2\pi} R_k(v-\theta_2)\left(f(u,\theta_2)-f(u,v)\right)\int_0^{2\pi} R_k(u-\theta_1)d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_0^{2\pi} R_k(v-\theta_2)\left(f(u,\theta_2)-f(u,v)\right)d\theta_2 = \int_0^{2\pi} R_k(v-\theta_2)f(u,\theta_2)d\theta_2 - f(u,v)\cdot \end{aligned}$$

En appliquant une nouvelle fois la question 10 à la fonction $h(v) = f(u,v)$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme application partielle de f), on obtient:

$$|J_2| \leq 2 \parallel \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \parallel \varepsilon + 4\pi \parallel f \parallel d_k(\varepsilon)$$

En sommant les deux inégalités et par utilisation de l'inégalité triangulaire, on obtient bien que:

$$|f_k(u,v)-f(u,v)| \leq 2\varepsilon\left(\parallel \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \parallel + \parallel \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \parallel\right) + 4\pi \parallel f \parallel d_k(\varepsilon)$$

16. Par la question 9, on peut affirmer qu'à ε fixé, il existe un nombre k tel que $d_k(\varepsilon) \leq \varepsilon$. On choisit un tel nombre k. Par la question 14 et la définition de la limite, on peut affirmer qu'il existe T_0 tel que

$$T \geq T_0 \Longrightarrow \left|\frac{1}{T}\int_0^T f_k \circ \theta(t)dt - (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2\right| < \varepsilon$$

Pour majorer l'expression $\Delta = \frac{1}{T}\int_0^T f \circ \theta(t)dt - (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2$, on écrit ce nombre comme somme de trois nombres en comparant à la même expression pour f_k soit $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \Delta_i$ avec :

$$\Delta_1 = \frac{1}{T}\int_0^T (f-f_k)\circ\theta(t)dt$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{1}{T}\int_0^T f_k \circ \theta(t)dt - (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \\ \Delta_3 &= (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (f_k(\theta_1,\theta_2)-f(\theta_1,\theta_2))d\theta_1 d\theta_2 \cdot \end{aligned}$$

Par inégalité de la moyenne:

$$|\Delta_1| \leq \parallel f - f_k \parallel \text{ et } |\Delta_3| \leq \parallel f - f_k \parallel$$

Par la question précédente, compte-tenu du choix de k $\parallel f - f_k \parallel \leq M\varepsilon$. Ainsi on trouve:

$$T > T_0 \Longrightarrow |\Delta| \leq (2M+1)\varepsilon$$

ce qui prouve que f vérifie le théorème ergodique.

17. On commence par vérifier que $\Phi_{a,b}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$: le seul problème est en a ou b . Cette fonction est nulle sur $[0,a]$ et sur $[b,2\pi]$: elle est continueà gauche de a età droite de b et de dérivée nulle. Sur $[a,b]$, $\Phi_{a,b}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et cette fonction et sa dérivée s'annulent en a et b. Ainsi $\Phi_{a,b}$ est continue en a et b et y a même dérivée à droite et à gauche. Comme elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$,$[a,b]$ et sur $[b,2\pi]$, elle est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2\pi]$. Etant nulle à gauche (par périodicité) et à droite de 0, elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit Ω un ouvert non vide de $]-1,1[^2$. Par le rappel, cet ouvert non vide contient un pavé ouvert P de la forme $]\cos b, \cos a[\times]\cos c, \cos d[$ où $0 < a < b < \pi$ et $0 < c < d < \pi$.
Posons $\Phi : (\theta_1,\theta_2) \mapsto \Phi_{a,b}(\theta_1)\Phi_{c,d}(\theta_2)$;. Compte-tenu de l'étude faite précédemment,$\Phi \in \mathcal{C}^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$.
Comme $\theta(t)$ est élément de K, on remarque que

$$\Phi(\theta(t)) \neq 0 \Longleftrightarrow (\theta_1,\theta_2) \in P$$

Si $x(t)$ n'est jamais élément de Ω, alors $\forall t, \Phi(\theta(t)) = 0$ et le terme de gauche de l'égalité (4) est nul. Soit d le terme de droite de cette égalité. On a alors:

$$\begin{aligned} d &= (2\pi)^{-2}\int_K \Phi(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \\ &= (2\pi)^{-2}\int_a^b \sin^2\left(\frac{\pi}{b-a}(\theta_1-a)\right)d\theta_1 \int_c^d \sin^2\left(\frac{\pi}{d-c}(\theta_2-c)\right)d\theta_2 > 0 \end{aligned}$$

La fonction Φ ne vérifie pas le théorème ergodique ce qui est en contradiction avec la question précédente, ainsi il a été démontré
par l'absurde qu'il existe un nombre t tel que $x(t) \in \Omega$.