DS 2 sur les approximations par des polynômes

première partie

A:relations entre les coefficients

1. (a)

- pour $n=0$ on vérifie les trois formules :

$$\begin{aligned}\binom{\alpha+1}{1} &= \alpha+1 = \frac{\alpha+1}{1}.1 = \frac{\alpha+1}{1}\binom{\alpha}{0}\\ 1.\binom{\alpha}{1} &= 1.\alpha = (\alpha-0)\binom{\alpha}{0}\\ (\alpha+1)\binom{\alpha}{0} &= \alpha+1 = (\alpha-0+1)\binom{\alpha+1}{0}\end{aligned}$$

- et pour $n>0$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha+1}{n+1} &= \frac{(\alpha+1)\,\alpha(\alpha-1)\cdots((\alpha+1)-(n+1)+1)}{(n+1)!}\\ &= \frac{\alpha+1}{n+1}.\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha+1}{n+1}\binom{\alpha}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n+1)\binom{\alpha}{n+1} &= (n+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,(\alpha-(n+1)+1)}{(n+1)!}\\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.(\alpha-n) = (\alpha-n)\binom{\alpha}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha+1)\binom{\alpha}{n} &= (\alpha+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\\ &= \frac{(\alpha+1)\,\alpha(\alpha-1)\cdots((\alpha+1)-n+1)}{n!}.(\alpha-n+1) = (\alpha-n+1)\binom{\alpha+1}{n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\binom{\alpha+1}{n+1} = \frac{\alpha+1}{n+1}\binom{\alpha}{n},(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = (\alpha-n)\binom{\alpha}{n},(\alpha+1)\binom{\alpha}{n} = (\alpha-n+1)\binom{\alpha+1}{n}}$$

(b)

- pour $n=0$ on a $1+\alpha = 1+\alpha$
- pour $n>0$

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,(\alpha-(n+1)+1)}{(n+1)!}\\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n+1)!}\,((n+1)+(\alpha-n)) = \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n+1)!})\binom{\alpha+1}{n+1}\end{aligned}$$

(c)

- Pour $n=0$ on a $1=1$
- Pour $n\geq 1$ on peut utiliser

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}\\ &= (-1)^n\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n\frac{1}{2^n n!}\frac{1.2.3.\cdots(2n-1)(2n)}{2.4.6\cdots(2n)} = (-1)^n\frac{1}{2^n n!}\frac{(2n)!}{2^n n!}\end{aligned}$$

$$\boxed{\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}}$$

On peut aussi procéder par récurrence avec la seconde formule du (a)

D'après la troisième formule du (a),

$$\frac{1}{2}\binom{-1/2}{n} = \frac{1-2n}{2}\binom{1/2}{n}$$

donc

$$\boxed{\binom{1/2}{n} = \frac{1}{1-2n}\cdot\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}}$$

2. n et m sont dans $\mathbb{N}$, on peut utiliser les définitions et propriétés des coefficients binomiaux.

(a) première méthode par méthode par dénombrement : Pour avoir tous les sous ensembles X de $E\cup F$ on prend les sous ensembles $X\cap E$ et $X\cap F$ .L'application

$$X \to (X\cap E, X\cap F)$$

est bijective car $E\cap F$ est vide.

La fonctionréciprque étant pour $A\subset E, B\subset F$: $(A,B)\to A\cup B$

Si X a n éléments et $X\cap E$ p éléments $X\cap F$ en a $n-p$.

A p fixé on a $\binom{m}{p}$ sous ensembles $X\cap E$ et $\binom{m}{n-p}$ sous ensembles $X\cap F$, donc $\binom{m}{p}.\binom{m}{n-p}$ couples $(X\cap E, X\cap F)$ on fait alors varier p on a $\sum_{p=0}^{n}\binom{m}{p}.\binom{m}{n-p}$ couples $(X\cap E, X\cap F)$ et donc' d'après la bijection, autant de sous ensemble X.

(b) deuxième méthode par Newton :

$$\begin{aligned}(1+X)^{2m} &= \sum_{n=0}^{2m}\binom{2m}{n}X^n\\ (1+X)^{2m} &= (1+X)^m(1+X)^m = \left(\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}X^p\right)\left(\sum_{q=0}^{m}\binom{m}{q}X^q\right)\end{aligned}$$

On cherche le terme en X^m du second produit. On doit donc prendre tous les produit X^pX^q pour $p+q=m$. Le coefficient est alors la somme des coefficients $\sum\binom{m}{p}\binom{m}{n-p}$. p prenant toutes les valeurs possibles donc $p\in[[0,m]]$ et $n-p\in[[0,m]]$. On veut donc $p\in[[0,m]]$ et $p\in[[n-p,n]]$. comme $n\le m$ on a l'intersection $p\in[[0,n]]$

$$\boxed{\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2 \text{ , } n\le m \Rightarrow \binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n}\binom{m}{p}\binom{m}{n-p}}$$

3. (a)

$$\binom{2\alpha}{n} - \sum_{p=0}^{n}\tbinom{\alpha}{p}\tbinom{\alpha}{n-p} = \frac{2\alpha\,(2\alpha-1)\cdots(2\alpha-n+1)}{n!} - \sum_{p=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}.\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+p-1)}{(n-p)!}$$

Les dénominateurs sont des constantes (en α) et les numérateurs des produits de n termes du premier degré (en α) . On a donc une combinaison linéaire de polynômes de degré n.

L'expression proposée est un polynôme en α de degré $\le n$.

Si on voit pas l'expression on fait une récurrence sur n avec une formule du 1:

- Si $n=0$ $\binom{\alpha}{0}=1$ est un polynôme
- Si $\binom{\alpha}{n}$ est un polynôme en α, on multiplie par $\dfrac{\alpha-n}{n+1}$ qui est u polynôme en α . $\binom{\alpha}{n+1}$ est encore un polynôme (et le degré est augmenté de 1)

(b) d'après l'expression précédente, tout $m\in\mathbb{N}$,$m\ge n$ est racine de ce polynôme.

(c) Le polynôme a donc une infinité de racines . c'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{\forall (n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}\text{ , }\binom{2\alpha}{n} = \sum_{p=0}^{n}\binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}}$$

B: Recherche d'un équivalent

1. (a) L'hypothèse de positivité strict des a_n assure l'existence de $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ et (pour la suite) de $\ln(a_n)$.

   - Comme $\sum w_n$ converge, la suite (w_n) tend vers 0, la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ tend vers 1 , donc la suite $\left(\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)$ tend vers 0.
   - Comme on ne sait rien du signe de ω_n , on ne sait rien du signe de $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. On passe donc par la convergence absolue :
   - Comme $\lim(w_n) = 0$ on a :
$$\left|\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right| = |\ln(1+w_n)| \sim |w_n|$$

   Comme $\sum w_n$ converge absolument $\sum\left|\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right|$ (par le théorème d'équivalent de séries à termes positifs) converge donc $\sum \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge (absolument).

   (b) $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$. La série $\sum \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ converge , donc la suite $(\ln(a_n))$ converge . Si l est la limite, la continuité de exp prouve que la suite (a_n) converge vers $\exp(l) > 0$.

2. (a)

   - $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n > 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^\gamma b_n > 0$.
   - $\dfrac{(n+1)^\gamma b_{n+1}}{n^\gamma b_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\gamma \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1+\dfrac{\gamma}{n}+\dfrac{\gamma(\gamma-1)}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\dfrac{\gamma}{n}+\dfrac{\gamma'}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1+w_n$ avec
$$\begin{aligned} w_n &= -\frac{\gamma^2}{n^2}+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2n^2}+\frac{\gamma'}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{2\gamma'-\gamma^2-\gamma}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

     le premier terme est une série de Riemann avec $2 > 1$ donc elle converge
     $\sum o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est une série convergente absolument par comparaison à une série de Riemann
     donc $\sum w_n$ converge absolument.

   - donc la suite $(n^\gamma b_n)$ converge vers un réel strictement positif L . On a donc $\boxed{b_n \sim \dfrac{L}{n^\gamma}}$
   - Comme la série est à termes positifs l'équivalent précédent donne la nature :
$$\boxed{\sum b_n \text{ converge si et seulement si } \gamma > 1}$$

3. (a) La relation du **A.1.a** $(n+1)\dbinom{\alpha}{n+1} = (\alpha-n)\dbinom{\alpha}{n}$ appliquée en $\alpha = 1/2$ donne
$$(n+1)(-1)^{n+1}c_{n+1} = \left(\frac{1-2n}{2}\right)(-1)^n c_n$$

   on a bien
$$\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2n-1}{2n+2}}$$

   (b) on utilise la question précédente mais attention $c_0 = -1 < 0$.
   on utilise la question précédente à partir du rang 1:

   - D'une part comme $c_1 = +\dfrac{1/2}{1} > 0$ et $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n-1}{2n+2} > 0$, on a $\forall n \geq 1\ c_n > 0$

- D'autre part on a le développement :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(1-\frac{3}{2n}+\frac{3}{2n^2}+o\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right)$$

On a donc $\gamma = \gamma' = \dfrac{3}{2}$.

Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $c_n \sim \dfrac{C}{n^{3/2}}$ et donc

$$\boxed{\binom{1/2}{n} \sim C\frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}}$$

C. Résultat d'approximation

1. On a la majoration pour $|z| \leq 1$
$$\left|\binom{1/2}{n}(-1)^n z^n\right| \leq \left|\binom{1/2}{n}\right| \sim \frac{C}{n^{3/2}}$$
Comme $3/2 > 1$, $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge , donc par équivalent $\sum \left|\binom{1/2}{n}\right|$ et par majoration
$$\boxed{\sum \binom{1/2}{n}(-1)^n z^n \text{ converge absolument}}$$
Remarque : sur]-1,1[la règle de D'Alembert permet de conclure en utiisant $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n-1}{2n+2}$. *Mais ne suffit pas si* $|z| = 1$

2. Pour $x \in [-1,1]$ la majoration précédente est indépendante de x . Elle prouve la convergence normale de la série sur $[-1,1]$. Comme chaque terme étant un polynôme est continue . donc $\boxed{f \in C^0\left([-1,1],\mathbb{R}\right)}$
remarque : On peut aussi dire que la série est une série entière de rayon de convergence 1 , ce qui assure la continuité sur]-1,1[, De plus on a la convergence aux bornes de l'intervalle et en déduire la continuité en ces points avec le théorème de continuité aux bornes d'une série entière.

3. On a $f(z)^2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n z^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n z^n\right)$. On pose $u_n = v_n = \binom{1/2}{n}(-1)^n z^n$. On a prouvé la convergence absolue de $\sum u_n$et $\sum v_n$ donc on peut faire le produit de Cauchy.
On pose pour tout n :
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}(-1)^n z^n \binom{1/2}{n-k}(-1)^{n-k}z^{n-k} = (-1)^n z^n \sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k}$$
.
C'est la formule du **A.3.b** avec $\alpha = 1/2$ et $k = p$. On a donc
$$w_n = (-1)^n z^n \binom{1}{n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ -1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n > 1 \end{cases}$$
On a donc
$$f(z)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n = 1 - z + \sum 0$$
$$\boxed{f(z)^2 = (1-z)}$$

4. Sur $[-1,1[$, $f^2(x) = 1-x$ donc aussi $f(x)$ ne prennent pas la valeur 0 . .f est donc une fonction continue sur un intervalle ne s'annulant pas. Son signe est constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
Mais $f(0) = 1 + \sum 0 = 1 > 0$. Donc $f(x) > 0$ sur $[-1,1[$,
Comme $f(x)^2 = 1-x$ on a $f(x) = \pm\sqrt{1-x}$ sur $[-1,1[$. . L'étude du signe montre alors que $f(x) = +\sqrt{1-x}$.
Si $x = 1$, $f(x)^2 = 0$ et donc $f(x) = 0$ et la formule précédente est encore vérifiée.
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n x^n = \sqrt{1-x} \text{ sur } [-1,1]}$$

5. (a) On a la formule de **A.1.c** qui donne

$$\binom{1/2}{n} = \frac{1}{1-2n} \cdot \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2}$$

comme $\binom{2n}{n} = \dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ on vérifie bien

$$\boxed{\binom{1/2}{n} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{4^n} \binom{2n}{n}}$$

(b) Si $x \in [-1,1]$, $1-x^2 \in [0,1] \subset [-1,1]$. On peut appliquer la question précédente

$$f(1-x^2) = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = |x|$$

D'après la remarque du (a) $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{1/2}{k} (1-x^2)^k$ est une somme partielle de la série $\sum_{0}^{+\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} (1-x^2)^k$.

Comme cette série converge et vaut $|x|$, on a bien la convergence de $L_n(x)$ vers $|x|$.

Avec le cours sur les suites de fonctions

$$\boxed{\text{la suite } (L_n) \text{ converge simplement vers } abs \text{ sur } [-1,1]}$$

Le théorème de Weierstrass veut une approximation uniforme. Elle se déduit aussi des majorations qui précédent. L_n *est la somme partielle de la série convergente* $\sum_{0}^{+\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} (1-x^2)^k$*.L'écart entre* $L_n(x)$ *et la somme est donc le reste d'ordre* n *.*

Sur $[-1,1]$ $|L_n(x) - |x|| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} (1-x^2)^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{1/2}{k}$. Donc $\sup_{[-1,1]} (|L_n(x) - |x||) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{1/2}{k}$, *C'est le reste d'ordre n d'une série convergente donc* $\lim_{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{1/2}{k} \right) = 0$ *et donc par majoration* $\lim \left(\sup_{[-1,1]} (|L_n(x) - |x||) \right) = 0$

2eme partie

A. Intégrales de Wallis

1. (a) $\underline{I_0 = \frac{\pi}{2} \ , \ I_1 = 1}$

Théorème de positivité stricte : la fonction $\sin(t)^n$ est continue positive sur $[0, \pi/2]$, et il existe au moins un point où la fonction est strictement positive. Donc $\boxed{I_n > 0}$

Cette question vous a beaucoup génée (faute d'avoir retrouver le bon théorème de premiière année) . N'oubliez pas que dans un tel cas il vaut mieux une bonne rédaction de $I_n \geq 0$ *, qu'une mauvaise rédaction de* $I_n > 0$ *.*

(b) On fait une intégration par partie dans I_n avec les fonctions C^1 : $\sin(t)^{n-1}$ et $-\cos(t)$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{n-1} \sin(t) dt = \left[-\sin(t)^{n-1} \cos(t) \right]_{t=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin(t)^{n-2} \cos(t) \cos(t) dt \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n-2} (1 - \sin(t)^2) dt = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour } n \geq 2 : nI_n = (n-1) I_{n-2}}$$

(c) Par récurrence :

- si $n = 1$ on a $1.I_1 I_0 = 1.1.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$
- si $nI_n I_{n-1} = \pi/2$ on a $(n+1) I_{n+1} I_n = nI_{n-1} I_n$ d'après le calcul précédent , donc $(n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$$\boxed{\text{pour } n \geq 1 \ , \ nI_n I_{n-1} = \pi/2}$$

(d) comme $\sin(t) \in [0,1]$,on a pour $n \geq 1$: $\cos(t)^n \leq \cos(t)^{n-1}$ On intègre l'inégalité, les bornes étant dans le bon sens: $I_n \leq I_{n-1}$

On a donc $I_n \leq I_{n-1}$. On remplace I_n par sa valeur trouvée au (b)

$$I_{n-1} \geq I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \geq \frac{n-1}{n} I_{n-1}$$

et on divise par $I_{n-1} > 0$

$$\boxed{\frac{n-1}{n} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1}$$

(e).D'après l'encadrement précédent $\lim \left(\frac{I_n}{I_{n-1}} \right) = 1$ et donc $I_{n-1} \sim I_n$. on reporte dans l'égalité du (d) : $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ on prend la racine carrée de quantités positives :

$$\boxed{I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

2. On a $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)(2n-2)} I_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3.1}{(2n)(2n-2)\cdots 4.2} I_0 = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 4.3.2.1}{[(2n)(2n-2)\cdots 4.2]^2} \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\frac{2}{\pi} I_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}}$$

on peut vérifier la formule par récurrence :

- $I_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{0!^2} \frac{1}{4^0} \frac{\pi}{2}$
- si $I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$ alors $I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} . \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2n+2} . \frac{2n+1}{2n+2} . \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{4^n ((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$

B : étude d'une suite:

1. (a) Dire que les suites sont équivalentes c'est dire que, à partir d'un certain rang, il existe une suite ε_k de limite 1 telle que $b_k = a_k \varepsilon_k$

   On écrit la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, k \geq N \Rightarrow |\varepsilon_k - 1| \leq \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon \leq \varepsilon_k \leq 1 + \varepsilon$$

   On multiplie l'inégalité par $a_k > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, k \geq N \Rightarrow |\varepsilon_k - 1| \leq \varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon) a_k \leq b_k \leq (1+\varepsilon) a_k$$

   (b) Pour $n \geq N$ on ajoute les inégalités de même sens :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow |\varepsilon_k - 1| \leq \varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon) \sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=N}^{n} b_k \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=N}^{n} a_k$$

   On ajoute les premiers termes (qui ne vérifient pas l'inégalité)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow |\varepsilon_k - 1| \leq \varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon) \left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right) + \sum_{k=0}^{N-1} b_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq (1+\varepsilon) \left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right) + \sum_{k=0}^{N-1} b_k$$

   On a donc en posant $M_1 = \sum_{k=0}^{N-1} b_k - (1-\varepsilon) \sum_{k=0}^{N-1} a_k$ et $M_2 = \sum_{k=0}^{N-1} b_k + (1-\varepsilon) \sum_{k=0}^{N-1} a_k$, quantités indépendantes de n .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow (1-\varepsilon) \sum_{k=0}^{n} a_k + M_1 \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=0}^{n} a_k + M_2$$

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k = \alpha_n \sum_{k=0}^{n} a_k$ avec :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow |\varepsilon_k - 1| \leq \varepsilon \Rightarrow (1-\varepsilon) + \frac{M_1}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \leq \alpha_n \leq (1+\varepsilon) + \frac{M_2}{\sum_{k=0}^{n} a_k}$$

en divisant par une quantité strictement positive.

Comme la série $\sum a_n$ est une série divergente à termes positifs , la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{M_1}{\sum_{k=0}^{n} a_k}$ et $\dfrac{M_2}{\sum_{k=0}^{n} a_k}$ tendent vers 0 :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists N' \ , \ n \geq N' \Rightarrow \left|\frac{M_1}{\sum_{k=0}^{n} a_k}\right| \leq \varepsilon \text{ et } \left|\frac{M_2}{\sum_{k=0}^{n} a_k}\right| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 = \max(N, N"), n \geq N_1 \Rightarrow (1-2\varepsilon) \leq \alpha_n \leq (1+2\varepsilon)$$

et donc $\lim(\alpha_n) = 1$ soit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \sim_n \sum_{k=0}^{n} a_k$

$$\boxed{(\forall k, a_k > 0 \text{ et } b_k > 0 \ , \ \sum a_n \text{ DV et } a_n \sim b_n) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} b_k \sim \sum_{k=0}^{n} a_k}$$

L'hypothèse de divergence des séries est indispensable : $\dfrac{1}{n^2} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *mais* $\displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *et* $\displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ *ne sont pas équivalente car la première tend vers* $\dfrac{\pi^2}{6}$ *et la seconde vers 1 (par téléscopage)*

2. Comme $t \neq 0$, on a la somme partielle d'une série géométrique de raison $\neq 1$.
   et si $t = 0$, $\varphi_n(0) = n$

3. (a) on fait le changement de variable C^1 : $t = \cos(x), x = \arccos(t)$

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_{\pi/2}^{0} \left(1 - \cos(t)^2\right)^n (-\sin(t))\, dt = I_{2n+1}$$

(b) comme $\varphi_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1-t^2)^k$ on a

$$v_n(1) = \int_0^1 \varphi_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} I_{2k+1}$$

(c) on utilise la question 1 en posant $b_n = I_{2n+1}$. Par la question A.1.e on a l'équivalent $b_n \sim a_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{(4n+2)}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \dfrac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$.

$\sum a_n$ est une série divergente , car à termes positifs et vérifiant $a_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} . \dfrac{1}{n^{1/2}}$ avec $1/2 < 1$. donc (à translation d'indice près) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sim \sum_{k=0}^{n-1} b_k$

$$\int_0^1 \varphi_n(t)dt \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}$$

(d) Faire une figure; la fonction $f : t -> \dfrac{1}{\sqrt{t+1/2}}$ décroît sur $[0, +\infty[$.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{t+1/2}} \leq \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t+1/2}} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{t+1/2}}$$

et donc en ajoutant/retranchant les termes qui manquent :

$$v_n(1)-\frac{1}{\sqrt{0+1/2}}-\frac{1}{\sqrt{1+1/2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1/2}}\leq\int_1^n\frac{dt}{\sqrt{t+1/2}}\leq v_n(1)-\frac{1}{\sqrt{0+1/2}}$$

$v_n(1)$ est le terme général d'une série à termes positifs divergente (1/2<1) et tend donc vers $+\infty$. $v_n(1)$ l'emporte sur les autres termes:

$$v_n(1)\sim\int_1^n\frac{dt}{\sqrt{t+1/2}}$$

On peut choisir d'encadrer la somme et on partira de $\displaystyle\int_1^n\frac{dt}{\sqrt{t+1/2}}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{t+1/2}}\leq\int_0^{n-1}\frac{dt}{\sqrt{t+1/2}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t+1/2}}+\int_1^n\frac{d}{\sqrt{t+}}$
.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1/2}}\sim 2\sqrt{n+1/2}-\sqrt{6}\sim 2\sqrt{n}$$

En multipliant par $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\boxed{v_n(1)\sim\sqrt{n\pi}}$$

4. (a) D'après le B.1 $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc $I_{2n}\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$ et donc $\boxed{\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}}$

   D'après 1.C.5.a

$$\binom{1/2}{n}=\frac{1}{2n-1}.\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}\binom{2n}{n}\sim\frac{1}{2n}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

   donc $\boxed{C=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}}$

   (b) on a $u_n(1)=\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}v_n(1)\sim\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\sqrt{n\pi}=1$

$$\boxed{\lim\left(u_n(1)\right)=1}$$

5. (a) Sur $[a,1]\subset]0,+\infty]$, v_n est C^1 de dérivée φ_n avec

$$|\varphi_n(t)|\leq|\varphi_n(a)|=\frac{1-(1-a^2)^n}{a^2}\leq\frac{1}{a^2}$$

   L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$|v_n(x)-v_n(y)|\leq|x-y|\,\frac{1}{a^2}$$

   On a donc :

$$\boxed{|u_n(x)-u_n(y)|=\leq|x-y|\,\frac{1}{a^2}.\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}}$$

   (b) on a donc

$$|u_n(x)-1|\leq|u_n(x)-u_n(1)|+|u_n(1)-1|\leq\frac{1}{a^2}.\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,|x-1|+|u_n(1)-1|$$

   Comme $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ les deux quantités tendent vers 0 et donc $\lim\left(u_n(x)\right)=1$

   (c) Pour tout $x\in]0,1]$ on peut choisir $a>0$ tel que $x\in[a,1]$, il suffit de prendre $a=\dfrac{x}{2}$ et donc

$$|u_n(x)-1|\leq\frac{4}{x^2}.\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,|x-1|+|u_n(1)-1|$$

   tend bien vers 0.

   (d) par contre $u_n(0)=0$ tend vers 0.

$$\boxed{\text{pour } x\in]0,1]\ \lim\left(u_n(x)\right)=1\ ,\ \lim\left(u_n(0)\right)=0}$$

6. u_n est la primitive d'une fonction positive , donc la dérivée de u_n est positive donc la fonction u_n est croissante. On a donc :

$$\forall n, \forall x, u_n(x) \leq u_n(1)$$

Mais la suite $(u_n(1))$ étant convergente est bornée : $\exists M = \sup(u_n(1), n \in \mathbb{N})$:

$$\boxed{\forall n, \forall x, u_n(x) \leq M}$$

C. d'autres suites de polynômes

1.
   - si $x = 0$: $P_n(x) = 0 = 0u_n(0)$
   - si $x \in]0,1]$,

   $$v_n(x) = \int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2} dt$$

   on développe par le binôme de Newton :

   $$\frac{1-(1-t^2)^n}{t^2} = \frac{1-\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-t^2)^k}{t^2}$$

   le terme pour $k = 0$ vaut 1 et se simplifie. il reste donc :

   $$\frac{1-(1-t^2)^n}{t^2} = \frac{-\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-t^2)^k}{t^2} = -\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^k t^{2k-2}$$

   l'intégrale donne

   $$v_n(x) = -\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

   d'où

   $$P_n(x) = xu_n(x) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} xv_n(x) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{2k-1}$$

2.
   - Pour $x = 0$ $P_n(0) = 0$ tend vers 0
   - Pour $x \in]0,1]$, $P_n(x) = xu_n(x)$ tend vers $x.1 = x$ d'après la partie précédente
   - Pour $x \in [-1,0[$ par parité $P_n(x) = P_n(-x) = -xu_n(-x)$ tend vers $-x$

   $$\boxed{\text{la suite } P_n(x) \text{ converge simplement vers } |x|}$$

3. On a :

   $$Q_n(x) - P_n(x) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{k}{n} x^{2k}$$

   On retrouve le développement par la formule du binôme de la question précédente:$1 - \left(1-t^2\right)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k-1} t^{2k}$.Et donc

   $$Q_n(x) - P_n(x) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \left(1-(1-x^2)^n\right)$$

   comme $x \in [-1,1]$, $0 \leq \left(1-(1-x^2)^n\right) \leq 1$ on a $|Q_n(x) - P_n(x)| \leq \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. donc $\lim (P_n(x) - Q_n(x)) = 0$

   $$\boxed{\text{la suite } Q_n(x) \text{ converge simplement vers } |x|}$$

4. D'après l'équivalent $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ on a $\widetilde{P_n}(x) \sim P_n(x)$ et $\widetilde{Q_n}(x) \sim Q_n(x)$ et les limites sont évidentes.