# spé PC2 , devoir surveillé 2 , samedi 8 octobre 2011
# D'après une épreuve du concours Marocain 2009 d'entrée aux écoles d'ingénieurs

Dans diverses démonstrations du théorème de WEIERSTRASS sur l'approximation sur un segment d'une fonction réelle ou complexe continue sur ce segment par des polynômes, l'étape clé est de montrer que l'application valeur absolue est limite sur $[-1,1]$ d'une suite de polynômes. L'objectif de ce problème est de présenter quelques unes de ces suites qui permettent de réaliser cette approximation.

**Notations et rappels**

Si $\alpha$ est un réel et $n$ un entier naturel, on pose en généralisant les coefficients binomiaux :

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!} \quad \text{si} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

On rappelle que si $n$ et $m$ sont des entiers naturels avec $n \leqslant m$, $\binom{m}{n}$ est le nombre de parties à $n$ éléments d'un ensemble à $m$ éléments.

## 1re Partie
## Approximation par les polynômes de Lebesgue

### A. Des relations entre coefficients

1. Généralisation de quelques formules classiques :

   (a) Montrer que

$$\begin{aligned}
\forall\alpha &\in \mathbb{R}\ , \forall n \in \mathbb{N}, \binom{\alpha+1}{n+1} = \frac{\alpha+1}{n+1}\binom{\alpha}{n} \\
\forall\alpha &\in \mathbb{R}\ , \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)\binom{\alpha}{n+1} = (\alpha-n)\binom{\alpha}{n} \\
\forall\alpha &\in \mathbb{R}\ , \forall n \in \mathbb{N}, (\alpha+1)\binom{\alpha}{n} = (\alpha-n+1)\binom{\alpha+1}{n}
\end{aligned}$$

   (b) Montrer : $\forall\alpha \in \mathbb{R}\ , \forall n \in \mathbb{N}\ , \binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$

   (c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}\ , \binom{-1/2}{n} = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ .En déduire $\binom{1/2}{n}$

2. Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels avec $n \leqslant m$ ; montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{m}{p}\binom{m}{n-p} = \binom{2m}{n}$.

   On pourra **au choix** :
   - considérer deux ensembles disjoints $E$ et $F$ ayant $m$ éléments chacun, puis calculer de deux façons différentes le nombre de parties à $n$ éléments de $E \cup F$.
   - Développer de deux façons différentes $(1+X)^{2n} = (1+X)^n.(1+X)^n$ .

3. Soit $n$ un entier naturel.

   (a) Vérifier que l'application $\alpha \mapsto \binom{2\alpha}{n} - \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$ est polynômiale

   (b) En donner des zéros (racines).

(c) Montrer alors que pour tout réel $\alpha$, $\displaystyle\binom{2\alpha}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$.

**B. Recherche d'un équivalent**

1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que, pour tout $n \geq 1$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1+w_n$ où $\sum w_n$ est une série qui converge absolument. .
   (a) Montrer que la série $\sum \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel **strictement positif**.
2. Soient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs et $\gamma, \gamma'$ deux réels tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \dfrac{\gamma}{n} + \dfrac{\gamma''}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
   (a) Vérifier que la suite $(n^\gamma b_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie les hypothèses de la question précédente. En déduire qu'il existe une constante $L > 0$ telle que $b_n \sim \dfrac{L}{n^\gamma}$.
   (b) Quelle est la nature de la série de terme général $b_n$ ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = (-1)^{n-1}\displaystyle\binom{1/2}{n}$.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n-1}{2(n+1)}$.
   (b) Établir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\displaystyle\binom{1/2}{n} \sim C\frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.

**C. Résultat d'approximation**

1. Montrer que si $|z| \leq 1$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{1/2}{n}(-1)^n z^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\binom{1/2}{n}(-1)^n z^n$ converge absolument.
   Sa somme sera notée $f(z)$ pour $|z| \leqslant 1$.
2. (5/2) Montrer que $f$ est continue sur $[-1, 1]$
   (3/2) admette la continuité.
3. Montrer, en faisant un produit de Cauchy, que si $|z| \leqslant 1$ alors $f(z)^2 = 1 - z$.
4. Justifier soigneusement que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-1, 1[$, puis que $f(x) = \sqrt{1-x}$ sur $[-1, 1]$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{(2k-1)2^{2k}}(1-X^2)^k$ ($n^{\text{e}}$ polynôme de Lebesgue).
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}$.
   (b) Vérifier que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|x| = f(1-x^2)$ et montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ , la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Lebesgue converge sur $[-1, 1]$ vers $|x|$.

## 2$^{\text{e}}$ Partie
## Approximation par d'autres suites de polynômes plus simples

### A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1. (a) Calculer $I_0$ et $I_1$ et justifier que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
   (c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $nI_nI_{n-1} = \pi/2$.
   (d) Montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leqslant 1$.
   (e) Justifier alors que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
2. En partant de $\forall n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ , déterminer une expression de $I_{2n}$ en fonction de $n$ et justifier
$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{2}{\pi} I_{2n}.$$

### B. Étude d'une suite

1. Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux séries à termes strictement positifs et telles que : $\begin{cases} \sum a_n \text{ diverge} \\ a_n \sim b_n \end{cases}$

   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\Sigma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$
   (a) Montrer : $\forall \varepsilon > 0$ , $\exists N$ , $k \geq N \Rightarrow (1-\varepsilon)a_k \leq b_k \leq (1+\varepsilon)\,a_k$
   (b) Montrer $S_n \sim \Sigma_n$
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on définit la fonction $\varphi_n$ par : $\forall t \in [0,1]$ $\varphi_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(1-t^2\right)^k$

   Montrer que pour $t \in ]0,1]$ $\varphi_n(t) = \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ .
   Dans la suite, on considère les fonctions $u_n$ et $v_n$ définies, pour tout entier $n \geqslant 1$, par
$$v_n(0) = u_n(0) = 0 \ ; v_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt \quad \text{et} \quad u_n(x) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} v_n(x) \quad \text{si } x \in ]0,1].$$
3. Étude de la suite $(v_n(1))_{n\geqslant 1}$
   (a) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^p \,\mathrm{d}t = I_{2p+1}$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n(1) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} I_{2p+1}$.
   (c) Montrer alors que $v_n(1) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p+1/2}}$

(d) A l'aide d'une comparaison série-intégrale en déduire . $v_n(1) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+1/2}}$ puis justifier que $v_n(1) \sim \sqrt{n\pi}$.

4. Étude de la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 1}$ . On a démontrer la relation : $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \dfrac{2}{\pi} I_{2n}$.

   (a) En déduire un équivalent de $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ et préciser la constante $C$ de la question **B.**3(b) de la première partie.

   (b) Montrer alors que la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

5. Soit $a \in ]0,1[$.

   (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la restriction de la fonction $u_n$ au segment $[a,1]$ est $k_n$-lipschitzienne avec $k_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{a^2 2^{2n}}$.

   (b) En utilisant ce qui précède et le fait que la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1, montrer que pour tout $x \in [a,1]$ , la suite de fonctions $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

   (c) En déduire que pour tout $x \in ]0,1]$ la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

   (d) Quelle est la limite de la suite $(u_n(0))$

6. 

   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $u_n$ est croissante sur le segment $[0,1]$.

   (b) En déduire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1], \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant M.$$

### C. D'autres suites de polynômes approchant la valeur absolue sur $[-1,1]$

On considère la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ des polynômes suivants :

$$P_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} X^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, $P_n(x) = x u_n(x)$.
2. En déduire que pour tout réel $x \in [-1,1]$ , la suite $(P_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers $|x|$ .
3. On pose $Q_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2k}{2k-1} X^{2k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. En étudiant $Q_n(x) - P_n(x)$,montrer que la suite $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $|x|$ pour $x \in [-1,1]$.
4. Montrer de même que pour $x \in [-1,1]$ , les suites $(\widetilde{P}_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(\widetilde{Q}_n(x))_{n\geqslant 1}$ convergent vers $|x|$, où

$$\widetilde{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} x^{2k} \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2k}{2k-1} x^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

FIN DE L'ÉPREUVE