CCP PSI 2008
partie 1 et 2

PARTIE 1 : quelques valeurs

I.1)

I.1.1) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)=\begin{cases}0 \text{ si } x>0\\ 1 \text{ si } x=0\\ +\infty \text{ si } x<0\end{cases}$

I.1.2)

- si $x\leq 0$ la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge grossièrement
- si $x>0$ La suite $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est de signe alterné et la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ décroît vers zéro , donc par le critère des séries alternées la série converge.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } \theta \text{ est }]0,+\infty[}$$

I.1.3)

I.1.3.1) Une primitive de tan sur un intervalle ne contenant pas de $\frac{\pi}{2}[\pi]$ est $-\ln(|\cos|)$

$$J_1=[-\ln(|\cos(x)|)]_0^{\pi/4}=\frac{\ln(2)}{2}$$

$$\boxed{J_1=\frac{\ln(2)}{2}}$$

I.1.3.2) Théorème de convergence dominée avec $f_n\,:\,t\to(\tan(t))^n$

- – pour tout n f_n est continue sur le segment $[0,\pi/4]$
  – la suite converge simplement vers $f\,:\,t\to\begin{cases}0 \text{ si } t\in[0,\pi/4[\\ 1 \text{ si } t=\pi/4\end{cases}$, fonction continue par morceaux sur $[0,\pi/4]$
  – $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[0,\pi/4]$ $|f_n(t)|\leq 1$, fonction continue indépendante de n.

donc (J_n) converge vers $\int_0^{\pi/4} f(t)dt=0$, car f est nulle sauf en nombre fini de points.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(J_n)=0}$$

On peut se passer du théorème en encadrant la fonction avec la convexité de tan *sur* $[0,\pi/4]$: *Le graphe de la fonction est au dessus de la tangente à l'origine et en dessous de la corde entre* $(0,0)$ et $(\pi/4,1)$: $t\leq\tan(t)\leq\frac{4}{\pi}t$. *On en déduit un encadrement de* J_n .

I.1.3.3) Comme la dérivée de $\tan(t)$ est $1+\tan(t)^2$ on a :

$$J_n+J_{n+2}=\int_0^{\pi/4}(1+\tan(t))^2(\tan(t))^n\,dt=\left[\frac{(\tan(t))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{J_n+J_{n+2}=\frac{1}{n+1}}$$

I.1.3.4) : On a : $(-1)^{k+1}\frac{1}{2k}=(-1)^{k+1}J_{2k+1}-(-1)^kJ_{2k-1}\;=v_{k+1}-v_k$ en posant $v_k=(-1)^kJ_{2k-1}$. donc par télescopage $\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\frac{1}{2k}=v_{n+1}-v_1=(-1)^{n+1}J_{2n+1}+J_1$

I.1.3.5) : On fait tendre n vers $+\infty$:$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k}=J_1=\frac{\ln(2)}{2}$

$$\boxed{\theta(1)=\ln(2)}$$

I.2.1)

```
S:=0;for k from 1 to n do S:=S+(-1)^(k+1)/k^3; od:  S;
```

I.2.2) La machine donne pour n=30 la valeur $\underline{S_{30}=0,901525083}$ et pour n=31 la valeur 0,901558650;

$$\boxed{\sigma=0,9015}$$

I.2.3) Comme la série vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées, la somme de la série est comprise entre deux sommes partielles consécutives. La somme est donc comprise entre 0,90152 et 0,90156

$$\boxed{\theta(3) = 0,9015 \text{ à } 10^{-4} \text{ par défaut}}$$

I.3.1)

- $\alpha_0 = \displaystyle\int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^3}{3}$
- pour $n > 0$ une double intégration par partie donne :

$$\alpha_n = \int_0^\pi x^2 \cos(nx)dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)dx = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^2}\int_0^\pi \cos(nx)dx = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$$

I.3.2)

- La fonction g est paire donc $b_n(g) = 0$
- $a_0(g) = \dfrac{2}{\pi}\alpha_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$
- pour $n \geq 1$ $a_n(g) = \dfrac{2}{\pi}\alpha_n = \dfrac{4\,(-1)^n}{n^2}$

I.3.3) Comme pour tout mxm réel $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ converge (normalement) sur $\mathbb{R}$
La restriction de la fonction g à $[-\pi,\pi]$ est C^1 sur $[-\pi,\pi]$ y compris en $-\pi$ car $g(-\pi) = g(\pi) = \pi^2 = (-\pi)^2$.
g étant 2π périodique, g est continue, C^1_{pm} sur $\mathbb{R}$, donc g est développable en série de Fourier:

$$\forall x \in]-\pi,\pi] \text{ , } x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

et donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}}$$

I.3.4) La relation précédente en $x = 0$ donne :

$$\boxed{\theta(2) = \frac{\pi^2}{12}}$$

I.3.5) La série est une série de Riemann, comme $4 > 1$ elle converge.
Pour la calculer on applique Parseval à g continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π périodique :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2 dt = \frac{a_0(g)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)^2 + b_n(g)^2$$

Soit

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\left(\frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9}\right)$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

I.3.6) on prend la primitive nulle en zéro du résultat de **I.3.3)** avec $f_n \,:\, t \to \dfrac{(-1)^n\cos(nt)}{n^2}$

- pour tour n f_n est continue sur $]-\pi,\pi]$

- la série $\sum f_n$ converge normalement sur $]-\pi,\pi]$ car $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$ terme général, indépendant de x d'une série convergente.

donc

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi]\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx) = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2}{12}x}$$

I.3.7) On intègre de nouveau par convergence normale :

$$\forall x \in]-\pi,\pi], \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}(1-\cos(nx)) = \frac{x^4}{48} - \frac{\pi^2}{24}x^2$$

soit en séparant en 2 le $\sum$ (possible car les deux séries obtenues convergent) :

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi]\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx) = -\theta(4) - \frac{x^4}{48} + \frac{\pi^2}{24}x^2}$$

I.3.8) Si on prend la valeur en π de la relation précédente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = -\theta(4) - \frac{\pi^4}{48} + \frac{\pi^4}{24}$$

et donc $\theta(4) = \dfrac{\pi^4}{24} - \dfrac{\pi^4}{48} - \dfrac{\pi^4}{90}$

$$\boxed{\theta(4) = \frac{7\pi^4}{720}}$$

Partie 2 étude de f

II.1) Comme $1+\exp(-nt)$ est plus grand que 1, la série est à termes positifs. De plus comme $x>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-nx}\right) = 0$ et donc $\ln(1+\exp(-nx)) \sim_{n\to+\infty} \exp(-nx)$.
$\sum \exp(-nx)$ est une série géométrique de raison $\exp(-x) \in]0,1[$. Elle converge . Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum \ln(1+\exp(-nx))$ converge sur $]0,+\infty[$

$$\boxed{\sum \ln(1+\exp(-nx)) \text{ est définie sur }]0,+\infty[}$$

II.2) Par convergence normale sur tout segement $[a,b] \subset]0,+\infty[$ avec $f_n : x \to \ln(1+\exp(-nx))$

- Pour tout n f_n est continue sur $]0,+\infty[$
- Par décroissance de f_n positive on a $\forall x \in [a,b] : |f_n(x)| \leq f_n(a)$ avec $\sum f_n(a)$ qui converge.

f est la somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur tout segment

$$\boxed{f \in C^0\left(\mathbb{R}^{+*},\mathcal{E}\right)}$$

II.3) *remarque : la dérivée n'est pas demandée.*
f est une somme de fonctions décroissante donc décroît.
De plus f_0 est constante et pour $n \geq 1$ les f_n sont strictement décroissante donc :

$$\boxed{f \text{ décroît strictement sur }]0,+\infty[}$$

II.4) image d'un intervalle par une fonction continue.
II.5) par convergence normale

- $f_0(x) = \ln(2)$ et pour $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)) = 0$
- Par décroissance de f_n positive sur $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$ on a $\forall x \in [a,+\infty[: |f_n(x)| \leq f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ qui converge.

  et donc $\lim\limits_{+\infty}\left(\sum\limits_{0}^{+\infty} f_n\right) = \sum\limits_{0}^{+\infty}\lim\limits_{+\infty}(f_n)$

$$\boxed{\lim_{+\infty}(f) = \ln(2)}$$

II.6) *5/2 : le sujet initiale étudie l'intégrale impropre* $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}dy$

II.6.1) On pose $h(0)=1$ pour prolonger par continuité.

II.6.2) On sait que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \text{ avec } R=1$$

On a donc

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ avec } R=1$$

II.6.3) En utilisant **I.1)** on constate que la formule précédente est encore vrai si $x=1$:

$$\forall x \in [0,1] \ , \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Donc pour $y \in]0,1]$:

$$h(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} y^n$$

Le membre de droite est une série entière de premier terme 1 . La relation précédente est donc encore valable si $y=0$.

Théorème d'intégration termes à termes :avec $\phi_n : y \to \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^{n-1}$:

- pour tout n ϕ_n est continue sur $[0,1]$
- $\sum \phi_n$ converge simplement et la somme est une fonction continue sur $[0,1]$
- $\sum \int_0^1 |\phi_n| = \sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.

On peut intégrer termes à termes :

$$\int_0^1 h(y)dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \theta(2) = \frac{\pi^2}{12}$$

remarque $\sup_{[0,1]} (|\phi_n|) = \frac{1}{n}$ *; Il n'y a pas convergence normale*

CCP TSI 2011
exercice 3 (sur 3)

Je note $a_n x^n$ le terme général de la série entière étudiée.

1. Pour les trois séries entières : $\begin{cases} |x|<1 \Rightarrow a_n x^n \text{ tend vers } 0 \\ |x|>1 \Rightarrow |a_n x^n| \text{ tend vers } +\infty \end{cases}$ donc $\boxed{R=1}$

   remarque : pour $|x|=1$ *, le terme général ne tend pas vers* 0 *, donc la série diverge grossièrement*

2. On sait que sur $]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Donc $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$

   $$\boxed{\forall x \in]-1,1[\ , \ f(x) = \frac{x}{1-x}}$$

   On peut dériver termes à termes une série entière sur le disque ouvert de convergence. Donc en dérivant $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. On multiplie par x

   $$\boxed{h(x) = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

3.

a) Sur $[0,1[$, g est la somme de fonctions strictement croissantes, donc est strictement croissante.

On peut aussi dériver sur le disque ouvert de convergence $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{3/2}x^{n-1} > 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq \sqrt{n} \leq n$ donc en multipliant par $x^n \geq 0$ et ajoutant les inégalités de même sens : $\forall x \in [0,1[$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (g(x)) = +\infty}$$

c) On a $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g"(0) = 2a_2 = 2\sqrt{2} > 0$. Par convexité le graphe est au dessus de la tangente.

Plus généralemnt, par dérivation termes à termes sur le dique ouvert de convergence $g"(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n^{3/2}(n-1)x^{n-2} > 0$.

Donc le graphe de g sur $[0,1[$ est convexe.

4.

a) g est continue strictement monotone sur l'intervalle $[0,+\infty[$, g est donc bijective de $[0,+\infty[$ sur $[g(0), \lim_{+\infty}(g) = [0,+\infty[$ (théorème de bijection monotone)

2 admet donc un unique antécédent noté α .

b) l'encadrement $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ donne $1 \leq g(1/2) \leq 2$. On a donc $g(1/2) \leq g(\alpha)$ et comme g est croissante $\boxed{\alpha \geq 1/2}$

c) La somme partielle $\sum_{n=1}^{N} n^{1/2}(0,6)^n$ vaut 1,916 si $N = 5$ et 2,030 si $N = 6$. Donc

$$\boxed{n_0 = 6}$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{1/2}(0.6)^n$ est à termes positifs , la somme est plus grande que toutes sommes partielles :

$$g(0,6) \geq \sum_{n=1}^{6} n^{1/2}(0,6)^n \geq 2 = g(\alpha)$$

Et la croissance donne $\alpha \leq 0,6$

$$\boxed{0,5 \leq \alpha \leq 0,6}$$

5.

a) Pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} (1-x)g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n-1}x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n \end{aligned}$$

Comme pour $n = 1$ on a : $\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = 1$ on a bien

$$\boxed{(1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n}$$

b)

- Comme $\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$ est positif, on a bien une série de signes alternés.
  En multipliant par la quantité conjugué on a

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

- Si n tend vers $+\infty$ le dénominateur tend vers l'infini donc $\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$ tend vers 0.
- Le dénominateur est somme de deux fonctions croissantes donc $n \to \sqrt{n}-\sqrt{n+1}$ décroît.
  On a les trois hypothèses du critère spécial des séries alternées.

$$\boxed{\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n \text{ converge.}}$$

c) On a :

$$\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) \sim \sqrt{n}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n^{1/2}}$$

On a des séries à termes positifs équivalents , comme $1/2 \leq 1$ la série $\sum \frac{1}{2n^{1/2}}$ diverge donc aussi la série $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

Si $x=-1$ la série $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) x^n$ ne ocnverge pas absolument , donc d'après les critères du rayon de congergence $R \leq 1$.

Or on sait déja que la série converge sur $]-1,1[$ donc

$$\boxed{R=1}$$

d) $k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) x^n$ est une série entière telle que pour $x=-1$, $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n$ converge . Par théorème de continuité d'une série entière au bord de l'intervalle ouvert de convergence k est continue en -1 et donc $\lim_{-1^+}(k(x)) = k(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n$. $g(x) = \frac{k(x)}{1-x}$ tend donc vers $\frac{k(-1)}{2}$ si x tend vers -1^+ .

On remarquera que la série donnant g diverge grossièrement en -1 . Ce qui n'empèche pas la fonction g d'avoir une limite finie en -1.