ICARE 1997 Math 2, corrigé

PROBLEME 2

Partie 1 (questions de cours)

1.) Si $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ et $C = AB = (c_{i,j})$, on sait que $\forall (i,j)$ $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k;j}$. Et donc

$$Tr(AB) = \sum_{\substack{i=1..n \\ k=1..n}} a_{i,k} b_{k,i}$$

de même

$$Tr(BA) = \sum_{\substack{i=1..n \\ k=1..n}} b_{i,k} a_{k,i}$$

La commutativité du produit et le changement d'indice $i \leftrightarrow k$ montre l'égalité :

$$\boxed{Tr(AB) = Tr(BA)}$$

2.) Si A' est semblable à A il existe une matrice inversible P telle que $A' = PAP^{-1}$. On a donc

$$Tr(A') = Tr(PAP^{-1}) = TR\left((PA)\,P^{-1}\right) = Tr(P^{-1}PA) = Tr(A)$$

3.ϕ_A est un projecteur .

- D'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n$. Il suffit donc de montrer que l'intersection est réduite à $\{0\}$:
  $\forall\ X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$ $\phi_A(X) = 0$ et $\exists\ Y$, $X = \phi_A(Y)$, et donc
  $$X = \phi_A(Y) = \phi_{A^2}(Y) = (\phi_A)^2(X) = \phi_A(\phi_A(X)) = 0.$$
- Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de ϕ_A est :
  $$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_\rho \end{bmatrix}$$
  On a donc $Tr(A) = Tr(A') = \rho = rg(A)$.

$$\boxed{\text{pour un projecteur } Tr(\phi) = rg(\phi)}$$

Partie 2

1.) . On a $M^3 = M^2 = M$ et les matrices $A = M$ et $X = M$ vérifient les relations (1), (2) et (3).

$$\boxed{M \text{ est donc pseudo-inverse d'elle même}}$$

remarque : c'est une propriété générale de tous les projecteurs.

Avec $A = M$ et $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $AX = X$ et $XA = A$. Ce qui donne $AXA = A$, $XAX = X$, $AX \neq XA$.

$$\boxed{X \text{ est donc inverse faible de } M\text{, mais ce n'est pas un pseudo-inverse}}$$

2a.) On vérifie en utilisant la définition d'un pseudo inverse :

- $(AX)(AX) = (AXA)X = AX$
- $(XA)(XA) = X(AXA) = XA$.

$$\boxed{AX \text{ et } XA \text{ sont bien des matrices de projection}}$$

b.)

- On a $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$ donc $rg(u \circ v) \leq rg(u)$
- Soit $(v_i)_{i=1}^{rg(v)}$ une base de $\mathrm{Im}(v)$ alors les $(u(v_i))_{i=1}^{rg(v)}$ engendrent $\mathrm{Im}(u \circ v)$, or le cardinal d'une base de $\mathrm{Im}(u \circ v)$ est inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice. $rg(u \circ v) \leq rg(v)$

$$rg(u \circ v) \leq \min(rg(u), rg(v))$$

c.) D'après la propriété précédente le rang d'un produit est inférieur au rang de chaque facteur donc comme $AXA = A$:

$$rg(AX) \leq rg(A) \text{ et } rg(A) = rg(AXA) \leq rg(AX)$$

On a donc $rg(A) = rg(AX)$, et puisque AX est une matrice de projection, $rg(AX) = Tr(AX)$.
De même $rg(XA) \leq rg(A)$ et $rg(A) = rg(AXA) \leq rg(XA)$ et donc $rg(A) = rg(XA)$

$$\boxed{rg(A) = rg(AX) = rg(XA) = Tr(AX)}$$

3.) Si A est inversible, et si $AXA = A$, on obtient, en multipliant à droite et à gauche par A^{-1}. Réciproquement $X = A^{-1}$ vérifie bien les 3 propriétés.

$$\boxed{\text{Le pseudo-inverse de } A \text{ est donc unique, égale à l'inverse de } A}$$

4a.) On a $AXAX' = (AXA)X' = AX'$

b.) Et comme $AX = XA$ et $AX' = X'A$ on a $AXAX' = XAX'A = X\,(AX'A) = XA$. On a donc $\boxed{XA = AX'}$.
On peut calculer de deux façons différentes XAX' :

$$\begin{aligned} XAX' &= (XA)X' = (AX')X' = (X'A)X' = X'AX' = X' \\ XAX' &= X(AX') = X(XA) = X(AX) = XAX = X \end{aligned}$$

et donc $\underline{X = X'}$.

$$\boxed{\text{Si il existe un pseudo-inverse de } A\text{, celui-ci est unique}}$$

5.)

- A et X jouent des rôles symétriques: <u>le pseudo inverse de X est A.</u>
- On vérifie que <u>le pseudo inverse de λA est $\frac{1}{\lambda}X$</u> qui existe car λ est non nul:
  $(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}X\right)(\lambda A) = (\lambda A)$, $\left(\frac{1}{\lambda}X\right)(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}X\right) = \left(\frac{1}{\lambda}X\right)$ et $(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}X\right) = \left(\frac{1}{\lambda}X\right)(\lambda A)$
- En utilisant le fait que pour toutes matrices ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, on vérifie que <u>le pseudo inverse de ${}^tA$ est ${}^tA$</u>:
  $({}^tA)({}^tX)({}^tA) = {}^t(AXA) = ({}^tA)$, $({}^tX)({}^tA)({}^tX) = {}^t(XAX) = ({}^tX)$, $({}^tA)({}^tX) = ({}^tX)({}^tA)$
- On vérifie par récurrence que <u>le pseudo inverse de A^k est X^k</u>:
  - La propriété est vrai pour $k = 1$
  - Si le pseudo inverse de A^k est X^k on a :
    $\rightarrow A^{k+1}X^{k+1}A^{k+1} = \left(AA^k\right)\left(X^kX\right)\left(A^kA\right) = A\left(A^kX^kA^k\right)XA = A\left(A^k\right)XA = A^k\,(AXA) = A^kA = A^{k+1}$
    en utilisant que si $AX = XA$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^kX = XA^k$.
    $\rightarrow$ de même $X^{k+1}A^{k+1}X^{k+1} = X^{k+1}$ en inversant le rôle de X et A
    $\rightarrow$ et $A^{k+1}X^{k+1} = X^{k+1}A^{k+1}$.
- On vérifie que <u>le pseudo inverse de RAR^{-1} est RXR^{-1}</u>:
  $\left(RAR^{-1}\right)\left(RXR^{-1}\right)\left(RAR^{-1}\right) = RA\left(R^{-1}R\right)X\left(R^{-1}R\right)AR^{-1} = R\,(AXA)\,R^{-1} = \left(RAR^{-1}\right)$,
  de même $\left(RXR^{-1}\right)\left(RAR^{-1}\right)\left(RXR^{-1}\right) = \left(RXR^{-1}\right)$
  et $\left(RXR^{-1}\right)\left(RAR^{-1}\right) = RXAR^{-1} = RAXR^{-1} = \left(RAR^{-1}\right)\left(RXR^{-1}\right)$

6a.) D'après le théorème du rang les dimensions sont les bonnes et par hypothèse, l'intersection est réduite au vecteur nul.

$$\boxed{\text{Donc les deux sous espaces sont supplémentaires}}$$

b.)

- existence :
  Pour v fixé dans $\mathbb{R}^n$ on décompose $v = \phi_A(w_1) + v_1$ avec $w_1 \in E$ et v_1 dans $\ker(A)$.
  On a $\phi_A(w_1) - v = -v_1 \in \text{Ker}(A)$ mais $w_1 \notin \text{Im}(A)$.
  On décompose donc : $w_1 = w + z$, avec $w \in \text{Im}(A)$ et $z \in \text{Ker}(A)$ et on a alors $\phi_A(w) = \phi_A(w_1)$, et donc : $\phi_A(w) - v \in \text{Ker}(A)$.

- unicité :
  si w et w' sont deux vecteurs de $\text{Im}(A)$ tels que $\phi_A(w) - v$ et $\phi_A(w') - v$ soient dans $\text{Ker}(A)$, on a $\phi_A(w) = \phi_A(w')$ par unicité de la décomposition de v en somme d'un vecteur de $\text{Im}(A)$ et d'un vecteur de $\ker(A)$, d'où $\phi(w - w') = 0$. Le vecteur $w - w'$ appartient dont à $\text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A)$. On a donc $w = w'$.

$$\boxed{\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists! w \in \text{Im}(A), \phi_A(w) - v \in \text{Ker}(A)}$$

Remarque: l'unicité de $v_1$ne suffit pas car nous n'avons pas celle de w_1 (mais seulement celle de $\phi_A(w_1)$)
On a donc $\phi_A(\varphi(v)) - v \in \text{Ker}(A)$ et $\varphi(v)$ est l'unique vecteur de $\text{Im}(A)$ vérifiant cette propriété.
Pour montrer que $\phi(v) = z$ il suffit donc de montrer que $z \in \text{Im}(A)$ et $\phi_A(z) - v \in \text{Ker}(A)$

c.)

- Soient v et v' deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, λ un scalaire, $w = \varphi(v)$ et $w' = \varphi(v')$ les vecteurs de $\mathrm{Im}(A)$ tels que $\phi(w) - v \in \mathrm{Ker}(A)$ et $\phi(w') - v' \in \mathrm{Ker}(A)$. On a alors comme $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous espace vectoriel
  D'une part : :
$$\phi_A(\lambda w + w') - (\lambda v + v') = \big(\lambda(\phi_A(w) - v) - (\phi_A(w') - v')\big) \in \mathrm{Ker}(A)$$
  D'autre part :
$$\phi_A(\varphi(\lambda v + v')) - (\lambda v + v') \in \mathrm{Ker}(A)$$
  Comme $\lambda w + w' \in \mathrm{Im}(A)$ (c'est un sous espace vectoriel) et $\varphi(\lambda v + v') \in \mathrm{Im}(A)$ on a par unicité : $\varphi(\lambda v + v') = \lambda w + w' = \lambda\varphi(v) + \varphi(v'))$
$$\boxed{\varphi \text{ est donc bien un endomorphisme de } \mathbb{R}^n}$$
-
  - Soit v de $\mathrm{Ker}(A)$, on a $\phi_A(0) - v \in \mathrm{Ker}(A)$, et donc comme $\varphi(v)$ et $0 \in \mathrm{Im}(A)$: $\varphi(v) = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.
  - Soit $v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, $\varphi(v) = 0$, on a donc : $\phi_A(0) - v \in \mathrm{Ker}(A)$, et donc $v \in \mathrm{Ker}(A)$.
$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\phi_A)}$$
- $\mathrm{Im}(\phi_A)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ on la même dimension (Théorème du rang) et on a par définition de φ l'inclusion $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Im}(A)$, donc :
$$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(A)}.$$
- Soit v est un vecteur de $\mathrm{Im}(A)$
  - Si $w = \phi_A(v)$ on a $\phi_A(v) - w = 0 \in \mathrm{Ker}(A)$ et donc $v = \varphi(w) = \varphi(\phi_A(v))$.
  - Par définition de φ on a $\phi_A(\varphi(v)) - v \in \mathrm{Ker}(A)$, mais $\phi_A(\varphi(v)) \in \mathrm{Im}(A)$ et $v \in \mathrm{Im}(A)$ donc $\phi_A(\varphi(v)) - v \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A) = \{0\}$. on a donc $\phi_A(\varphi(v)) = v$.
$$\boxed{\forall v \in \mathrm{Im}(A)\ , \phi_A \circ \varphi(v) = \varphi \circ \phi_A(v) = v}$$
-
  - $\varphi \circ \phi_A \circ \varphi = \varphi$ car si $v \in \mathbb{R}^n$ on a $\varphi(v) \in \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(A)$ et donc d'après la question précédente : $(\varphi \circ \varphi_A)(\varphi(v)) = \varphi(v)$.
  - $\varphi_A \circ \phi \circ \varphi_A = \varphi_A$ car si $v \in \mathbb{R}^n$ on a $\varphi_A(v) \in \mathrm{Im}(A)$ et donc d'après la question précédente : $(\varphi_A \circ \varphi)(\varphi_A(v)) = \varphi_A(v)$.
  - $\phi_A \circ \varphi = \varphi \circ \phi_A$. On utilise le fait que le noyau et l'image sont supplémentaires :
    - Si $v \in \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ on a $\phi_A \circ \varphi(v) = \varphi \circ \phi_A(v) = 0$,
    - Si $v \in \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\varphi)$ on a $\phi_A \circ \varphi(v) = \varphi \circ \phi_A(v) = v$.
    - Si $v \in \mathbb{R}^n$, comme $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A)$, on décompose $v = i + k$ avec $i \in \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\varphi)$ et $k \in \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(\varphi)$
$$\boxed{Mat(\varphi) \text{ est un pseudo inverse de } A}$$

7a.)

- $\mathrm{Im}(X) \subset \mathrm{Im}(A)$:Soit $v \in \mathrm{Im}(X)$, il existe w tel ue $v = \phi_X(w)$. D'après les définitions d'un pseudo inverse on a $X = XAX = AX^2$.Donc on a $v = \varphi_A(\varphi_{X^2}(w)) \in \mathrm{Im}(A)$.
- $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(X)$ idem en utilisant $A = XA^2$.
$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(X)}$$
- $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(X)$. On utilise $X = X^2A$ donc $\phi_A(v) = 0 \Rightarrow \phi_X(v) = \phi_{XA}(\phi_A(v)) = 0$
- $\mathrm{Ker}(X) \subset \mathrm{Ker}(A)$.Idem avec $A = A^2X$
$$\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(X).}$$
- Soit $v \in \mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A)$. Soit w tel que $v = \phi_A(w)$, et on a comme $A = AXA$ et $AX = XA$
$$v = \phi_A(w) = \phi_A \circ \phi_X \circ \phi_A(w) = (\phi_X \circ \phi_A)(\phi_A(w)) = \phi_X \circ \phi_A(v) = \phi_X(0) = 0$$
  . La somme $\mathrm{Ker}(A) + \mathrm{Im}(A)$ est donc directe et le théorème du rang montre qu'elle est égale à $\mathbb{R}^n$.
$$\boxed{\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n}$$

Remarque avec les questions 6 et 7 on a prouvé : le pseudo inverse existe si et seulement si le noyau et l'image de A sont supplémentaires.

b.) On sait d'après la question **2.a)** et **2.c)** que AX est la matrice d'une projection. et que $rg(A) = rg(AX)$. donc $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(AX))$

- Comme on a toujours $\mathrm{Im}(AX) \subset \mathrm{Im}(A)$, on a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(AX)$

- De même d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(AX))$ et comme on a toujours $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(XA)$. L'hypothèse $AX = XA$ donne alors $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(XA)$ on a $\mathrm{Ker}(AX) = \mathrm{Ker}(A)$.

$$\boxed{AX \text{ est donc la projection sur } \mathrm{Im}(A), \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(A)}$$