PROBLEME2 :D'APRES ICARE SESSION 1997
Math 2 extrait du second problème

Le but de ce problème est de généraliser la notion d'inverse d'une matrice carrée à coefficients dans $\mathbf{R}$.

On notera $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{R}$, ${}^tM$ la transposée de la matrice M, $Tr(M)$ la trace de la matrice M (somme des éléments diagonaux). On associe à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'endomorphisme ϕ_M de $E = \mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M, et on note $\mathrm{Im}(M)$ son image et $\mathrm{Ker}(M)$ son noyau.

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang $rg(A) = \rho$.

Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on définit les relations:

(1) $AXA = A$

(2) $XAX = X$

(3) $AX = XA$

Si (1) et (2) sont vérifiées, on dit que X est un inverse faible de A, et si (1), (2) et (3) sont vérifiées, on dit que X est un pseudo-inverse de A.

Partie 1

1.) Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $Tr(AB) = Tr(BA)$.

2.) Si A' est semblable à A, **montrer que** $Tr(A') = Tr(A)$.

3.) On suppose que A est une matrice de projection. ($A^2 = A$).
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.
En déduire que $Tr(A) = rg(A)$.

Partie 2

1.) Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer M^3 et en déduire un inverse faible de M. Est-ce un pseudo-inverse?
Vérifier que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est aussi un inverse faible de M. Est-ce aussi un pseudo-inverse?

2.) On suppose que X vérifie (1), c'est à dire $AXA = A$.
a.) Prouver que AX et XA sont des matrices de projection.

b.) Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Montrer $rg(u \circ v) \leq rg(u)$ et $rg(u \circ v) \leq rg(v)$
c.) Prouver que $rg(A) = rg(AX) = rg(XA) = Tr(AX)$.

3.) On suppose A inversible.
Si X vérifie (1), **prouver que** X est unique et est un pseudo-inverse de A.

4.) On suppose que X et X' sont des pseudo-inverses de A.
a.) Calculer $AXAX'$.
b.) En déduire $AX' = XA$ puis $X = X'$. **Conclure**.

5.) En supposant que A admet un pseudo-inverse X, **prouver que** les matrices suivantes ont un pseudo-inverse et **le calculer**: X, λA ($\lambda \in \mathbf{R}^*$), A^k ($k \in \mathbf{N}^*$), ${}^tA$, RAR^{-1} pour R inversible quelconque.

6.) On suppose que $\mathrm{Im}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$.

a.) Montrer que $\mathbf{R}^n = \mathrm{Im}\,(A) \oplus \mathrm{Ker}\,(A)$.

b.) Montrer que pour tout v de $\mathbf{R}^n$, il existe w unique de $\mathrm{Im}\,(A)$ tel que $\phi_A(w) - v \in \mathrm{Ker}(A)$.

c.) On note $w = \varphi(v)$.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

Vérifier que $Ker(\varphi) = Ker(A)$ et que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(A)$.

Montrer que pour tout vecteur v de $\mathrm{Im}(A)$ on a $\varphi \circ \varphi_A(v) = \varphi_A \circ \varphi(v) = v$

En déduire que la matrice de φ relativement à la base canonique est un pseudo-inverse de A.

7.) On suppose que A admet un pseudo-inverse X.

a.) Montrer que $\mathrm{Im}(X) = \mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(X) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathbf{R}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A)$.

b.) Montrer que AX est la matrice de projection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathrm{Im}(A)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(A)$.