Problème e3a

Préliminaires

1. On utilise la concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$ (sa dérivée seconde est -sinus, négative sur $[0, \pi/2]$) .

   On en déduit que le graphe de sinus est en dessous sa tangente en 0 d'équation $y = x$ et au dessus de sa corde reliant $(0, 0)$ et $(\pi/2, 1)$ d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$.

   On peut faire la figure qui illustre les inégalités de concavité :

$$\boxed{\forall t \in [0, \pi/2], \frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t}$$

2.

   1. $\sin t \sim_0 t$ donc $\lim\limits_0 (\varphi(t)) = 1$ et la fonction se prolonge par continuité.

   2. On fait une intégration par parties avec les fonctions C^1 sur $[1, x]$: $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos(t)$ et donc $u'(t) = \frac{1}{t^{é}}$, $v'(t) = \sin t$

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

   3.

      - $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{\cos(x)}{x}\right) = 0$, par produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle.
      - On peut majorer $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ fonction continue positive intégrable sur $[1, +\infty[$. donc $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge.

        :$\lim\limits_{+\infty} (\Phi) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$

$$\boxed{\Phi \text{ a donc une limite finie en } +\infty.}$$

   4. D'après la question précédente $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge et d'après la première question $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \text{ converge.}}$$

Partie 2

1.

   1.

      - $t \mapsto \frac{\cos t \sin(2nt)}{\sin t}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et admet une limite finie $(2n)$ en 0 . La fonction se prolonge par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0, \pi/2]$

        Remarque : On peut aussi majorer : $\forall x \in R$, $|\sin(x)| \leq x$ et $\forall t \in]0, \pi/2[$ $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ donc $\left|\frac{\cos t \sin(2nt)}{\sin t}\right| \leq 1.2nt.\frac{1}{\frac{2}{\pi}t} = \pi$

        . Beaucoup d'entre vous ont majoré par 1 , c'est faux à case de la limite en 0. La majoration fréquente aussi par $2n$ semble juste avec Maple mais non prouvable facilement.
      - $t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{t}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et admet une limite finie $(2n)$ en 0 . La fonction se prolonge par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0, \pi/2]$

      Les intégrales sont convergentes : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \sin(2nt)}{\sin t}\, dt$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\, dt$ sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2. On a comme $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos(\dfrac{a+b}{2})\sin(\dfrac{a-b}{2})$ et $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t(\sin((2n+2)t-\sin(2nt))}{\sin t}\ dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \sin t \cos((2n+1)t)}{\sin t}\ dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos((2n+1)t)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+2)t + \cos 2nt\ dt = \left[\frac{\sin(2n+2)t}{2n+2} + \frac{\sin 2nt}{2n}\right]_0^{\pi/2} = 0
\end{aligned}$$

Le calcul de primitive est possible car $n \neq 0$.
La suite $(u_n)_{n0}$ est donc constante.
Or comme $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ on a

$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \sin 2t}{\sin t}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t + 1\ dt = \pi/2$$

.
et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est constante et vaut } \pi/2}$$

2. On suppose $m > 0$ pour pouvoir faire une intégration par parties avec : $u(t) = h(t)$ et $v(t) = \dfrac{e^{imt}}{im}$ fonctions C^1 sur $[\alpha,\beta]$

$$H_m = h(\beta)\frac{e^{im\beta}}{im} - h(\alpha)\frac{e^{im\alpha}}{im} - \int_\alpha^\beta h'(t)\frac{e^{imt}}{im}\ dt$$

On a :donc comme $\left|e^{iX}\right| = 1$ si $X \in \mathbb{R}$:

$$\left| H_m \leq \frac{1}{m}\left(|h(\beta)| + |h(\alpha)| + \int_\alpha^\beta |h'(t)|\, dt\right)\right|$$

Toute la parenthèse est un constante par rapport à m et donc :

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} H_m = 0}$$

remarque : on peut étudier la limite de $\displaystyle\int_\alpha^\beta h'(t)\frac{e^{imt}}{im}$ *dt par le théorème de convergence dominée mais c'est plus long.*

3. On sait que si f admet en 0 un *D.L.* $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$ alors alors f se prolonge par continuité en posant $f(0 = a_0$ et la fonction prolongée est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$ (mais pas la dérivée n'est pas obligatoirement continue)
On fait un donc D.L de h en 0 :

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{t\sin(t)} = \frac{(t - t^3/6 + o(t^3)) - (t - t^3/2 + o(t^3))}{t^2 + o(t^3)} \\
&= \frac{t/3 + o(t)}{1 + o(t)} = (t/3 + o(t))\,(t - o(t)) = \frac{t}{3} + o(t)
\end{aligned}$$

h se prolonge par continuité en posant $h(0) = 0$ et la fonction prolongée est dérivable avec $h'(0) = 1/3$
Puis on fait un D.L. de $h'(t\ )$ pour vérifier la continuité de h' en 0 :

$$h'(t) = \frac{t^2 - \sin^2 t}{t^2\sin^2 t} = \frac{\frac{t^4}{3} + o(t^4)}{t^4 + o(t^4)}$$

de limite 1/3 , ce qui prouve la continuité de h' en 0 (et la cohérence des 2 calculs):
Remarque (variante) : On utilise le théorème qui dit que si on a une fonction continue en 0 , dérivable sur $]-\varepsilon,\varepsilon[-\{0\}$, et si la dérivée admet une limite λ en 0 , alors f est est C^1 sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ et $f'(0) = \lambda$. (mais n'oubliez de d'abord prolongé par continuité)

Remarque (autre méthode) : On peut aussi prouver que $h(t) = \dfrac{\sin(t) - t\cos(t)}{t\sin(t)}$ *est le quotient de deux fonctions développables en série entières avec* $h = \dfrac{F}{G}$ *et pour* $t \neq 0$ $F(t) = \dfrac{\sin(t) - t\cos(t)}{t^2}$ *et* $G(t) = \dfrac{t\sin t}{t^2}$ *et vérifier que* F *et* G *sont deux fonctions développables en série entière sur* R *(après prolongement en* 0*) et que* $G(0) \neq 0$*, donc* h est C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

4.

1. *Méthode qui doit devenir classique :* $\sin(\theta) = \operatorname{Im}\left(e^{i\theta}\ \right)$.
   Avec les notations précédentes :

$$v_n - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nt)\left(\frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t}\right)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nt)h(t)\ dt.$$

   Or la fonction h prolongée est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc d'après la question 2 :

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)e^{imt}\ dt = 0$$

   ce qui donne en prenant la partie imaginaire :

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\sin(mt)\ dt = 0.$$

   On a donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0}$$

2. On a prouvé : : $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$ (question 4.1) et $\forall n \geq 1$, $u_n = \dfrac{\pi}{2}$ (question 1.2) donc

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$$

   Or dans $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\ dt.$ le changement de variable C^1 bijectif de $[0, \pi/2]$ sur $[0, n\pi]$ $u = 2nt$ donne $v_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\ dt$.
   On sait (préliminaire) que $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\ dt$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, par composition des limites $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\ dt$ tend vers $\lim \left(\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt\right)$
   et donc

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt = \frac{\pi}{2}.}$$