Problème Mines-Pont

Remarque : Je n'ai pas utilisé la notation avec les normes des fonctions , restant à chaque fois au sup .

PRELIMINAIRES

1. On étudie une intégrale de paramètre x et de variable d'intégration t .

   -
     - Pour $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et donc $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
     - Pour $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a g bornée sur $\mathbb{R}$, et f positive sur $\mathbb{R}$, donc on a la majoration:

     $$\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t)g(x-t)| \leq \sup_{\mathbb{R}}(|g|).f(t) \quad .$$

     Par définition de $\mathcal{P}$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par linéarité $t \mapsto \sup_{\mathbb{R}}(|g|).f(t)$ l'est et d'après le théorème de majoration $t \mapsto f(t)g(x-t)\,dt$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.
   - L'étude précédente donne la domination donc la continuité de l'intégrale à paramètre :
     - $\forall t \in \mathbb{R}$; $x \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car g est continue.
     - $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après l'étude précédente
     - on a domination sur $\mathbb{R}$ donc sur tout segment) par $\phi(t) = \sup_{\mathbb{R}}(|g|).f(t)$ $\left\{\begin{array}{c} \text{indépendante de } x \\ \text{continue intégrable sur } \mathbb{R} \\ x \in [a,b]\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \ |f(t)g(x-t)| \leq \sup_{\mathbb{R}}(|g|).f \end{array}\right.$

     d'où la continuité de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.

     $$\boxed{f * g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$
   - A x fixé , le changement de variables $t \mapsto u = x - t$ C^1bijectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ transforme l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt$ en l'intégrale convergente $\int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)\ (-du) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,du$ et et on a l'égalité:

     $$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt = (g*f)(x) \quad .$$

2. Je prend l'hypothèse $f \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. D'après la commutativité de la question précédente le résultat est vrai aussi si $g \in \mathcal{P}$ et $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

   Le sujet nous propose d'étudier une suite (x_n) donc d'utiliser le critère séquentiel :

   $$\lim_{x\to+\infty} f*g(x) = 0 \Leftrightarrow \forall (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ,\ \lim(x_n) = +\infty \Rightarrow \lim f(x_n)) = 0$$

   On prend donc (x_n) une suite de limite $+\infty$ et on utilise le théorème de convergence dominée.

   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto f(t)g(x_n - t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.
   - $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t)g(x_n - t)$ tend vers 0 ($g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{+\infty}(g) = 0$)
   - On a toujours la domination par une fonction indépendante de n , continue intégrable sur $\mathbb{R}$:

     $$\forall n \in N, \forall t \in \mathbb{R} : \quad |f(t)g(x_n - t)| \leq \sup_{\mathbb{R}}(|g|).f(t)$$

   - et donc .$\lim((f*g)(x_n)) = 0$.

   Le critère séquentiel donne donc :

   $$\boxed{\lim_{x\to\infty}(f*g)(x) = 0}$$

   .

   Le même raisonnement s'applique en $-\infty$ (avec la même domination), et donne que$\boxed{(f*g)(x) \longrightarrow_{x\to-\infty} 0}$.

3. Dans le sujet $f * g$ n'est pas défini pour deux fonctions f et g dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On se doute quand même de la définition.

   Toute fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'est pas dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, car l'intégrabilité n'implique pas la limite nulle en $\pm\infty$.Il faut vérifier que le changement d'hypothèse sur la fonction n'altère pas les résultats précédents.

   (En particulier si vous avez u=utilisé la limite nulle en $\pm\infty$ dans la question 1 il faut adapter la démonstration de continuité).

- $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$: Dans la première question on utilise les hypothèses "continue" et "bornée" qui sont aussi vérifiées dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. La méthode, donc le résultat reste vraie et donc $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $f*g$ est bornée sur $\mathbb{R}$: La majoration de **Q1**,$\forall\ x\in\mathbb{R}$, $\forall t\in\mathbb{R}$ $|f(t)g(x-t)|\leq\sup_{\mathbb{R}}(|g|).f(t)$ donne (bornes dans le bon sens) comme $\int_{\mathbb{R}} f=1$ que
$$|f*g(x)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,dt\right|\leq\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sup_{\mathbb{R}}(|g|)\ dt=1.\sup_{\mathbb{R}}(|g|).=\sup_{\mathbb{R}}(|g|)$$
- $f*g$ est positive sur $\mathbb{R}$:comme intégrale (convergente) d'une fonction positive , les bornes étant dans le bon sens.
- $\int_{-\infty}^{+\infty}f*g(x)dx=1$: On veut calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,dt\right)dx=1$.On va utiliser le théorème (admis) de Fubini pour les intégrales impropres avec $F(x,t)=f(t)g(x-t)$
(j'ai vérifié toutes les hypothèses et pas seulement celles demandées par le sujet)
  - $v\to|F(v,t)|=f(t)g(v-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par changement de variable : $u\to f(t)g(u)$ est intégrable ($f(t)$ est une constante en u et g est intégrable sur $\mathbb{R}$) . Le changement de variable C^1 bijectif $u=v-t$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$donne alors le résultat
  - $w\to|F(x,w)|=|f(w)g(x-w)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par majoration par $\sup_{\mathbb{R}}(g)f(w)$ (c'est l'étude de **Q1**)
  - $x\to\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,t)dt=f*g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après **Q1**
  - $t\longmapsto\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,t)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(u)du$ est continue sur $\mathbb{R}$ par domination par $\sup_{\mathbb{R}}(f)\,g(u)$
  - $x\to\int_{\mathbb{R}}|F(x,t)|\,dt$ et $t\longmapsto\int_{R}|F(x,t)|\,dx$ sont continues sur $\mathbb{R}$ (mêmes fonctions car $F(x,t)\geq0$)
  - On a intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $t\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x,t)|\,dx$ car
  $$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x,t)|\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,t)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,dx=\int_{\mathbb{R}}f(t)g(u)du=f(t)\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)du=f(t)$$
  (car $g\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty}g=1$
  Et on sait que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
  - Et donc
  $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,t)\,dt\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,t)\,dx\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt \text{ d'après le calcul du point précédent}\\ &= 1 \text{ car } f\in\mathcal{P}(\mathbb{R})\end{aligned}$$
  $$\boxed{(f,g)\in\mathcal{P}(\mathbb{R})^2\Rightarrow f*g\in\mathcal{P}(\mathbb{R})}$$

UNE CLASSE D'OPERATEURS

4. en **Q3** on a montré que pour $f\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$:
$$\forall x\in\mathbb{R}:\ |f*g(x)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,dt\right|\leq\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sup_{\mathbb{R}}(|g|)\ dt=1.\sup_{\mathbb{R}}(|g|)=\sup_{\mathbb{R}}(|g|)$$
la démonstration utilise uniquement que g est continue bornée donc est vrai aussi pour $u\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
$$\forall x\in\mathbb{R}:\ |f*u(x)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)u(x-t)\,dt\right|\leq\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sup_{\mathbb{R}}(|u|)\ dt=1.\sup_{\mathbb{R}}(|u|)=\sup_{\mathbb{R}}(|u|)$$
On en déduit que $f*g$ est bornée et
$$\boxed{\forall f\in\mathcal{P}(\mathbb{R})\ ,\ \forall u\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R})\ ,\ \sup_{\mathbb{R}}(|f*u|)\leq\sup_{\mathbb{R}}(|u|)}$$

5. La commutativité démontrée question **Q1** est vrai aussi pour deux fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, car elle n'utilise pas l'hypothèse de limite nulle, donc on a pour f et g éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ $f * g = g * f$.

   L'associativité est admise par le sujet avec les bon ensembles pour f, g et u .

   On peut donc écrire:

$$(T_f \circ T_g)(u) = f * (g * u) = (f * g) * u = (g * f) * u = g * (f * u) = (Tg \circ Tf)(u) \quad .$$

6. Comme T_f est linéaire, on a, par commutativité et en ajoutant et en retranchant $(T_{f_1} \circ T_{g_2})(u)$

$$(T_{f_1} \circ T_{f_2})(u) - (T_{g_1} \circ T_{g_2})(u) = T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)) + (T_{f_1} - T_{g_1})(T_{g_2}(u))$$

   En utilisant la linéarité et la question précédente on a :

$$(T_{f_1} - T_{g_1})(T_{g_2}(u)) = (T_{f_1 - g_1} \circ T_{g_2})(u) = (T_{g_2} \circ T_{f_1 - g_1})(u) = T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))$$

   et donc :

$$(T_{f_1} \circ T_{f_2})(u) - (T_{g_1} \circ T_{g_2})(u) = T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)) + T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))$$

   .

   Par définition $T_{g_2} \circ T_{f_1 - g_1}(u) = T_{g_2}(T_{f_1 - g_1}(u)) = g_2 * (T_{f_1 - g_1}(u))$, et donc d'après la question 4 :

$$\sup_{\mathbb{R}} (|T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))|) = \sup_{\mathbb{R}} (|g_2 * (T_{f_1 - g_1}(u))|) \leq \sup_{\mathbb{R}} (|T_{f_1 - g_1}(u)|) = \sup_{\mathbb{R}} (|(T_{f_1} - T_{g_1})(u)|)$$

   et de même pour $T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))$.

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}} (|(T_{f_1} \circ T_{f_2})(u) - (T_{g_1} \circ T_{g_2})(u)|) &\leq \sup_{\mathbb{R}} |T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))| + \sup_{\mathbb{R}} (|T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))|) \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}} (|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)|) + \sup_{\mathbb{R}} (|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)|) \end{aligned}$$

   remarque : l'astuce du début : $ab - \alpha\beta = a(b - \beta) - \beta(a - b)$ est classique , c'est par exemple celle qui sert à démontrer la limite d'un produit.

7. On aura besoin dans le calcul de dire $T_{(f^{*n})}(u) = (T_f)^n(u)$, qui se vérifie par récurrence :

   - vrai si $n = 1$
   - Si $T_{(f^{*n})}(u) = (T_f)^n(u)$, on a :

$$T_{\left(f^{*(n+1)}\right)}(u) = f^{*(n+1)} * u = f * f^{*n} * u = T_f(T_{f^{*n}}(u)) = T_f\left(T_f^n(u)\right) = T_f^{(n+1)}(u)$$

   Par récurrence :

   - L'inégalité est triviale pour $n = 1$.
   - L'inégalité est vrai pur $n = 2$ d'après la question précédente avec $f_1 = f_2 = f$ et $g_1 = g_2 = g$
   - Si elle est vrai au rang $n-1$ on prend $f_1 = f, f_2 = f^{*(n-1)}, g_1 = g, g_2 = g^{*(n-1)}$ on a alors comme $(T_{f_1} \circ T_{f_2})(u) = \big(T_f \circ T_{f^{*(n-}}$ la relation :

$$\begin{aligned} \|(T_f)^n(u) - (T_g)^n(u)\| &\leq \|(T_f)(u) - (T_g)(u)\| + \left\|(T_f)^{n-1}(u) - (T_g)^{n-1}(u)\right\| \\ &\leq \|(T_f)(u) - (T_g)(u)\| + (n-1)\|(T_f)(u) - (T_g)(u)\| = n\|(T_f)(u) - (T_g)(u)\| \end{aligned}$$