E3A 2011 - Mathématiques A MP

Partie I

1. On utilise la règle de D'Alembert pour $t \neq 0$:

$$\left| \frac{\frac{t^{n+1}}{n+2}}{\frac{t^n}{n+1}} \right| = \frac{(n+1)\,|t|}{n+2)} \longrightarrow |t|$$

   La série converge si $|t| < 1$ et diverge si $|t| > 1$.

   Le rayon de convergence de la série entière est donc 1.

   remarque (non demandée) . Elle converg en -1 et diverge en 1 .

2.

   - Si $t = 0$on a bien $f(t) + S(t) = -1 + 1 = 0$
   - Si $t \neq 0$ on utilise le développement en série entière de $\ln(1-t)$ sur $]-1, 1[$

$$\forall t \in \,]-1, 1[, \quad \ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k}$$

   .On divise par $t \neq 0$:

$$\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$$

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[\ , \ f(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}}$$

3.

   - Sur $]-1, 1[$ la fonction $f = -S$ est C^∞ comme toute série entière sur le disque ouvert de convergence.
   - Par quotient à dénominateur non nul de fonctions C^∞ , f est C^∞ sur $]-\infty, 0[$.
   - f est donc C^∞ sur $]-\infty, 1[$:
     - si $x \leq -1/2$ $x \in]-\infty, 0[$ et donc f est C^∞ en x .
     - si $x \geq -1/2$ $x \in]-1, 1[$ et donc f est C^∞ en x .

$$\boxed{f \in C^\infty\left(]-\infty, 1[, \mathbb{R}\right)}$$

   remarque : attention aux raccords. Si vous prenez $]-1, 1[$ et $]-\infty, -1]$, il faut vérifier que toutes les dérivées à droite et à gauche en -1 sont égales.

   Dire que la fonction est C^∞ sur $]-\infty, -1]$, veut seulement dire que la fonction est C^∞ à gauche en -1 .

   Par exemple $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } x \leq -1 \\ 1/(x+1) \text{ si } x > -1 \end{array} \right.$ *admet des restrictions à]-$\infty, -1]$ et $]-1, 1[$ qui sont C^∞ , mais ne se raccorde pas en -1.Rajouter la continuité en -1* ne suffit pas $f(x) = |x+1|$

   Pour dire $C^\infty(I)$ et $C^\infty(J)$ donc $C^\infty(I \cup J)$ il faut que $I \cap J$ soit un intervalle non réduit un point.

4.

   - si $t = 0$ $f(t) = 1 < 0$
   - si $t > 0$ $\ln(1-t) < 0$ donc $f(t) < 0$
   - si $t < 0$ $\ln(1-t) > 0$ donc $f(t) < 0$

$$\forall t \leq 1 \ , \ f(t) < 0.$$

Partie II

1. $-L$ est la primitive nulle en 0 de la fonction f qui est (question **I.3)** C^∞ sur $-\infty, 1[$. $-L$ y est donc C^∞ donc aussi L.

$$\boxed{L \in C^\infty\left(]-\infty,1[,\mathbb{R}\right)}$$

2. La primitive admet une limite finie si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}dt$ converge. On pose $u = 1-t$ changement de variable C^1bijective pour revenir en 0. On étudie donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt$. $t \to \dfrac{\ln(t)}{1-t}$ est continue négative sur $]0,1]$, équivalente en 0 à $\ln(t)$, fonction de référence intégrable sur $]0,1]$

$$\boxed{L \text{ admet une limite finie en } 1}$$

Par suite, $L(x)$ a pour limite $-\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

3. D'après la dérivée d'une primitive, $L' = -f > 0$ sur $]-\infty,1[$ (d'après **I.4.**). L est donc strictement croissante sur $]-\infty,1[$ et par prolongement par continuité L est strictement croissante sur $]-\infty,1]$.
(car si L est strictement croissante $\forall x < 1$, $L(x) < \lim\limits_{1}(L)$)

$$\boxed{L \text{ est strictement croissante sur }]-\infty,1]}$$

4. <u>première version</u> : avec les séries entières:
Théorème : On peut calculer la primitive nulle en 0 d'une série entière par intégration termes à termes sur le disque ouvert de convergence, et la série entière obtenue a le même rayon de convergence que la série initiale.
On en déduit par intégration termes à termes :

$$\forall x \in]-1,1[\quad L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

<u>deuxième version</u> par intégration termes à termes avec une intégrale sur $[0,x]$ avec CVN(et de façon symétrique sur $[x,0]$

- Si pour tout n f_n est continue sur le segment $[a,b]$
- Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$
- alors $f = \displaystyle\sum_0^\infty f_n$ est continue sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b \sum_0^\infty f_n = \sum_0^\infty \int_a^b f_n$
La C.V.N. est vérifiée car $\left|\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1} \le |x|^{+1}$, série géométrique qui converge car $|x| < 1$

variante : intégration terme à terme d'une primitive:

- Si pour tout n f_n est continue sur I
- Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans I.
- Si $x_0 \in I$
- alors $f = \displaystyle\sum_0^\infty f_n$ est continue sur I et la primitive nulle en x_0 de f se calcul par intégration termes à termes.

<u>troisième version</u> par intégration termes à termes avec une intégrale sur $[0,x]$ avec $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$ (et de façon symétrique sur $[x,0]$

- Si pour tout n f_n est continue par morceaux sur l'intervalle I
- Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si $\displaystyle\sum_0^\infty f_n$ est continue par morceaux sur I
- Si $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$ converge

- alors $f=\sum_0^\infty f_n$ est intégrable sur I et $\int_I \sum_0^\infty f_n = \sum_0^\infty \int_I f_n$

  La troisième hypothèse se vérifie avec $I=[0,x]$ ou $[x,0]$ car $\sum \int_I \left|\frac{t^n}{n+1}\right| dt = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \leq |x|^{n=1}$

  Par contre il 'y a pas de théorème qui dit que si $\sum \int_{-1}^1 |f_n|$ converge $\int_0^x \sum_0^n f_n = \sum_0^\infty \int_0^x f_n$ pour $x \in]-1,1[$

5. première méthode par dérivation :
   Si $x \in]-1,1[$ on a $-x \in]-1,1[$ et sur ce domaine L est dérivable :.On peut dériver les 2 membres sur $]-1,1[$ sachant $L'=-f$

   - $\frac{d}{dx}(L(x)+L(-x)) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + (-1)\left(-\frac{\ln(1+x)}{-x}\right) = -\frac{\ln(1-x^2)}{x}$
   - $\frac{d}{dx}\left(\frac{L(x^2)}{2}\right) = \frac{2x}{2}\left(-\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\right) = -\frac{\ln(1-x^2)}{x}$
   - les deux membres sont égaux en $x=0(\ 0=0)$ et ont la même dérivée , ils sont égaux :

   deuxième méthode par changement de variables :

$$\begin{aligned} L(x^2) &= \int_0^{x^2} \frac{\ln(1-t)}{t}dt = 2\int_0^x \frac{\ln(1-u^2)}{u}du = 2\left(\int_0^x \frac{\ln(1-u)}{u}du + \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u}du\right) \\ &= 2\left(\int_0^x \frac{\ln(1-u)}{u}du + \int_0^{-x} \frac{\ln(1+v)}{v}dv\right) = L(x)+L(-x) \end{aligned}$$

   en faisant les 2 changements de variables C^1 bijectifs $t=u^2$ de $]0,x]$ sur $]0,x^2]$ et $v=-u$ de $]0,x]$ sur $]0,-x]$
   troisième méthode par séries entières :

$$\begin{aligned} L(x)+L(-x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \frac{(-x)^n}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{x^n}{n^2} + \frac{(-x)^n}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{x^n}{n^2} + \frac{(-x)^n}{n^2} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\,(x)^{2k}}{(2k)^2} + \sum 0 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\left(x^2\right)^k}{k^2} = \frac{1}{2}L(x^2) \end{aligned}$$

   Puisque L est continue en -1 (**II.1**) et se prolonge par continuité en 1 (**II.2)** , on fait tendre x vers 1 et la relation est vrai en 1 . idem en -1.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1] \ , \ L(x)+L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}}$$

6. Théorème : si une série entière (de rayon de convergence R) converge si $x=R$ (ou $x=-R$) , elle est continue en R^- (ou en $(-R)^+$) .

   C'est le cas ici car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

   Comme L est continue en 1 on a :

$$L(1) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} L(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

   remarque : erreur de texte : la somme est sur n pas sur k.

$$\boxed{L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$

   Remarque : le fait que L se prolonge par continuité ne suffit pas : $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$ sur $]-1,1[$,

   $\phi(x) \to_{x \to 1} \frac{1}{2}$ *et pourtant* $\sum_0^{+\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$ *est faux.*

Et si on sort du cadre des séries entières $\phi(x) = \sum f_n(x)$ *peut converger sur* $]-1,1[$, ϕ *peut avoir une limite en* 1^- *et* $\sum f_n(1)$ *peut converger avec pourtant* $\sum f_n(1) \neq \lim_1 (\phi)$

(*le contre exemple du cours sur es séries de fctions était sans doute* $\sum x^n(1-x)$)

Partie III

1. Si $n = 1$, le résultat est faux : $m \mapsto m+1$ n'est pas une bijection de l'ensemble des entiers impairs de $[0,0]$ (ensemble vide) sur $\{1\}$.

   Si $n \geq 2$. on étudie la bijection sur $\mathbb{Z}$:$\theta_n \; m \longmapsto m + 2^{n-1}$ de fonction réciproque $p \mapsto p - 2^{n-1}$ Etudions l'image de l'ensemble X_n des entiers impairs entre 0 et $2^{n-1}-1$

   - 2^{n-1} est pair , donc si m est impair $\theta_n(m)$ est impair.
   - θ_n est strictement croissante
   - si $0 \leq m \leq 2^{n-1}-1$, $2^{n-1} \leq \theta_n(m) \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$

   Donc $\theta_n(X_n) \subset Y_n = \left\{p \text{ , impair , } 2^{n-1} \leq p \leq 2^n - 1\right\}$

   De la même façon, on vérifie que l'image de Y_n par θ_n^{-1} est X^n

   $$\boxed{\text{On a bien une bijection}}$$

2. Comme $x \in]0,\pi/2[$, $x/2 \in]0,\pi/2[$ et $(x+\pi)/2 \in]0,\pi/2[$; les dénominateurs sont tous non nuls. De plus comme $\sin(t+\pi/2) = \cos(t)$ et $\sin(t)\cos(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2}$ on a :

   $$\frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{x+\pi}{2})} = \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{4}{\sin^2 x}$$

   $$\boxed{\frac{4}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{x+\pi}{2})}}$$

3. Vérification par récurrence :

   - Pour $n = 1$, la relation à démontrer est $2 = \dfrac{1}{\sin^2(\pi/4)}$, donc est bien vérifiée.
   - Pour $n = 2$ on a :

     $$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$$

     La question précédente donne

     $$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)} = \frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = 8$$

     Or $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$ car $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

     On commence à comprendre ce qui se passe. On peut essayer avec $n = 3$ pour voir.
   - Supposons vraie la relation

     $$2^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

     Dans la somme

     $$\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

     on sépare en 2

     $$\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)} + \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

et on regroupe $\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)$ avec $\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)=\sin^2\left(\frac{2^{n+1}-2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)$.
Si k décrit $0..2^{n-1}-1$, $2k+1$ décrit les entiers impairs de 1 à 2^n (soit de 0 à 2^n-1), pendant que $2^{n+1}-2k-1$ décrit les entiers impairs de 2^n+1 à $2^{n+1}-1$ (soit de 2^n à $2^{n+1}-1$) .
D'après la question **III.1** on obtient donc d'un coté tous les termes de la première somme et de l'autre tous ceux de la seconde somme.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)} &= \left(\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}+\frac{\pi}{2}\right)}\right)\\ &= 4\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}=4.2^{2n-1}=2^{2(n+1)-1}\end{aligned}$$

et la propriété est vérifiée par récurrence.
remarque : au lieu de la bijection de la question 1, on peut faire un changement d'indice dans la seconde somme telle que $(2k+1)=2^{n+1}-2K-1$ soit $K=2^n-2k-1$ et vérifier que $k\mapsto K$ est bijective de $\left[0..2^{n-1}-1\right]$ sur $\left[2^{n-1}..2^n-1\right]$

4. Sujet réécrit pour être compatible avec le programme PC

a)La fonction sin est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.La courbe est au-dessous de la tangente passant par $(0,0)$ soit la droite d'équation $y=x$.

La fonction tan est convexe sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.La courbe est au-dessus de la tangente passant par $(0,0)$ soit la droite d'équation $y=x$.

$$\boxed{\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[\ \sin(x)\leq x\leq\tan(x)}$$

b) On a sur $]0,\frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{1}{\tan^2(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}=\frac{1}{\sin^2(x)}-1$$

On prend $x=\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$ et on ajoute les égalités . On a 2^{n-1} fois 1 à retrancher :

$$\boxed{2^{2n-1}-2^{n-1}=\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}}$$

c) On prend $x=\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$ dans l'encadrement déduit du **a)**

$$\frac{1}{\tan^2(x)}\leq\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{\sin^2(x)}$$

et on ajoute les termes

$$2^{2n-1}-2^{n-1}\leq\frac{2^{2n+2}}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{(2k+1)^2}\leq 2^{2n-1}$$

ce qui donne :

$$\pi^2\left(\frac{1-2^{-n}}{8}\right)\leq\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{(2k+1)^2}\leq\frac{\pi^2}{8}$$

On sait que la série converge , un passage à la limite donne par encadrement

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$

5. En séparant les termes pairs et impairs a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}{4}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}{4}+\frac{\pi^2}{8}$$

.On a donc

$$\boxed{L(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\pi^2/6}$$

La question **II-5** donne pour $x=1$ $L(1)+L(-1)=\dfrac{L(1)}{2}$ soit :

$$\boxed{L(-1)=-\pi^2/12}$$

6. Pour $x\in]0,1[$ on a $1-x\in]0,1[$ on peut donc dériver en utilisant $L'=-f$:

$$\frac{d}{dx}\left(L(1-x)\right)=-\left(-f(1-x)\right)=\frac{\ln(x)}{1-x}$$

et

$$\frac{d}{dx}\left(-\ln(x)\ln(1-x)-L(x)\right)=\frac{\ln(x)}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x}=\frac{\ln(x)}{1-x}$$

Il existe une constante telle que

$$L(1-x)=C-\ln(x)\ln(1-x)-L(x)$$

Si x tend vers 0 , $L(1-x)$ tend vers $L(1)$ et $L(x)$ tend vers 0 par continuité , et $\ln(x)\ln(1-x)\sim -x\ln(x)$ tend vers 0 . La constante vaut $L(1)$

$$\boxed{L(1-x)=L(1)-\ln(x)\ln(1-x)-L(x)}$$

7. En prenant $x=1/2$ dans la relation précédente, on obtient $L(1/2)=L(1)-(\ln 2)^2\ -L(1/2)$d'où

$$\boxed{L(1/2)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\ln 2)^2}{2}}$$

.

8. La fonction à intégrer est continue sur $]0,\ln 2]$ et se prolonge par continuité en 0.Elle est intégrable sur $]0\ln 2]$:
Le changement de variable $u=1-e^t$ C^1 bijectif de $]0,\ln(2)]$ sur $[-1,0[$ donne ,

$$\int_0^{\ln(2)}\frac{tdt}{1-\exp(-t)}=\int_0^{-1}\frac{\ln(1-u)}{1-\frac{1}{1-u}}\,\frac{-du}{1-u}=-\int_{-1}^{0}\left(\frac{\ln(1-u)}{u}\right)du=-L(-1)$$

Or la fonction $u\longmapsto\dfrac{\ln(1-u)}{(1-u)}$ est la dérivée de $u\longmapsto -\ln^2(1-u)/2$, donc

$$\boxed{I=\frac{\pi^2}{12}}$$

remarque : on peut aussi se ramener à $L(1/2$ en posant $u=1-e^{-t}$

Partie IV

1. La fonction f est continue négative sur $]-\infty,0[$ et en $-\infty$ $|f(t)|\gg\dfrac{1}{|t|}$ car $\lim\left(\ln(1-t)\right)=\infty$. Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{dt}{t}$ diverge $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}f(t)dt$ diverge.

$L(x)=\displaystyle\int_x^0 f(t)dt$, n'a donc pas de limite finie. Comme la fonction est croissante sur $]-\infty,0]$, elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$

$$\boxed{\lim_{-\infty}(L)=-\infty}$$

2. La fonction $x \longmapsto 1-1/x$ est dérivable de dérivée $\dfrac{1}{x^2}>0$ donc est strictement croissante sur $]0,1[$. L'intervalle image est donc l'ouvert $\left]\lim\limits_0, \lim\limits_1\right[=]-\infty, 0[$.

3.

a) Les fonctions $x \longmapsto 1-x$ et $x \longmapsto 1-1/x$ sont dérivables sur $]0,1[$, à valeurs dans $]0,1[$ et $]-\infty,0[$; puisque L est dérivable sur ces deux intervalles, h_2 est dérivable sur $]0,1[$ et comme $L'=-f$ on a :$\forall x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= f(1-x)-\frac{1}{x^2}\,f(1-1/x) \\ &= \frac{\ln x}{1-x}-\frac{1}{x^2}\,\frac{\ln 1/x)}{1-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{\ln x}{1-x}+\frac{1}{x\,(x-1)}\,\ln x=-\frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

(b) Comme sur $]0,1[$, $\dfrac{d}{dx}\left(-\ln^2 x/2\right)=-\ln x/x$, il existe une constante C tel que, pour tout $x \in\,]0,1[, \quad h_2(x)=-\ln^2 x/2+C$. En prenant la limite en 1, on obtient $C=0$,

$$\boxed{L(1-x)+L\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln^2(x)}{2}}$$

4. On prend la limite en 0 dans la relation précédente $L(1-x)$ tend vers 1 , $L\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers $\lim\limits_{-\infty}(L)=-\infty$ et $\ln(x)$ tend vers -∞ . On peut négliger $L(1-x)$ et

$$L\left(1-\frac{1}{x}\right)\sim\frac{\ln^2(x)}{2}$$

Le ln est négligeable en $-\infty$ devant x donc $\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)L\left(\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right)$ tend ver 0 si x tend vers 0. En posant $X=1-1/x$, $x=\dfrac{1}{1-X}$ on a par composition $\lim\limits_{X\to-\infty}\left(\dfrac{L(X)}{X}\right)=0$

$$\boxed{\lim_{-\infty}\left(\frac{L(x)}{x}\right)=0}$$

5. Puisque L tend vers $-\infty$ en $-\infty$, mais que $L(x)/x$ y a pour limite 0, la courbe a une branche parabolique de direction horizontale.

6. Pour le graphe on peut remarquer que $L'(x)$ tend vers $+\infty$ si x tend vers 1 . Le graphe présente une tangente verticale en $\left(1;\dfrac{\pi^2}{6}\right)$

Partie V

1. L'équation homogène associée équivaut à $y'=-\dfrac{y}{x}$ sur J ; ses solutions sont les fonctions

$$K\exp\left(\int\left(-\frac{1}{x}\right)\right)=K\exp(-\ln(|x|)=\frac{K}{|x|}$$

En posant $C=K$ si $J\subset]0,1[$ et $C=-K$ si $J\in]-\infty,0[$

$$\boxed{S_H=\operatorname{Vect}\left(x\to\frac{K}{x}\right)}$$

L'ensemble des solutions est la droite vectorielle engendrée par la fonction $x\longmapsto 1/x$.

2. Par variation des constantes : on cherche les solutions du type $x\longmapsto\lambda(x)/x$, où λ est une fonction dérivable sur J. On a l'équation $(1-x)'(x)=1$.

Une solution particulière est $x\to\ln(1-x)$

Les solutions sur J sont donc les fonctions de la forme $\underline{x\longmapsto-\dfrac{\ln(1-x)}{x}+\dfrac{A}{x}=-f(x)+\dfrac{A}{x}\quad\text{où } C \text{ est une constante}}$

3. $(\mathcal{F}_J)$ est l'équation précédente d'inconnue y' .On a donc sur J $y'(x) = -f(x) + \dfrac{A}{x}$ soit

$$\boxed{y(x) = L(x) + A\ln(|x|) + B}$$

On peut aussi dériver g . En déduire que les fonctions g sont <u>des</u> solutions , Puis dire que comme sur J le coefficient devant y" n'a pas de racine l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 2 et donc par inclusion et égalité des dimensions les fonctions g sont <u>les</u> solutions.

4. Pour obtenir une solution sur $]-\infty, 1[$, il faut raccorder une solution sur $]-\infty, 0[$ à une solution sur $]0, 1[$ en 0.

   On prend donc $y(x) = \begin{cases} L(x) + A\ln(|x|) + B \text{ si } x < 0 \\ L(x) + A'\ln(|x|) + B' \text{ si } x \in]0, 1[\end{cases}$

   - Si x tend vers 0 , $L(x)$ tend vers $L(0)$ donc $y(x)$ admet une limite finie en 0 si et seulement si $A = A' = 0$.
     On a alors $y(0^+) = B$ et $y\left(0^-\right) = B'$. Pour avoir un raccord continue il faut donc prendre $B = B'$
     Les seules solutions possibles sur $]-\infty, 1[$ sont les fonctions $L(x) + B$
   - Une telle fonction est C^∞ sur $]-\infty, 1[$ et vérifie l'équation sur cet intervalle.

   L'ensemble des solution est une droite affine d'origine L et de direction Vect(1)