D'après CCP 2006 -PSI
Partie I.

1.

1. D'après la formule du binôme de Newton on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n}$$

2. On a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n^*=\alpha$.
3. Les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont grossièrement divergentes si $\alpha\neq 0$, et trivialement convergente si $\alpha=0$

$$\boxed{\sum a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha=0\ ;\ \sum a_n^* \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha=0}$$

2.

1. La formule du binôme de Newton donne maintenant :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n^*=\frac{1}{2^n}(z+1)^n}$$

2. On a une série géométrique de raison $q=z$ vérifiant $|q|<1$. Elle converge donc et

$$\boxed{A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^k=\frac{1}{1-z}}$$

Comme $|z|<1$ on a $\left|\frac{z+1}{2}\right|\leq\frac{1+|z|}{2}<1$ et $\sum a_n^*$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme :
$\sum_{n\geq 0}a_n^*=\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{2}{1-z}=2A(z)$

$$\boxed{\sum_{n\geq 0}a_n^*=2A(z)}$$

3.

- La série $\sum a_n$ est géométrique et diverge vue sa raison.
- Si $z=-2$ alors $a_n^*=(-1/2)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.
- (a_n^*) est une suite géométrique de raison

$$r=\frac{e^{i\theta}+1}{2}=e^{i\theta/2}\left(\frac{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}{2}\right)=\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$$

.Comme $\theta\in]0,\pi[$, $|r|=|\cos(\theta/2)|\in]0,1[$ donc $\sum a_n^*$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^*=\frac{1}{1-r}=\frac{2}{1-e^{i\theta}}=\frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)}=1+i\cot an\,(\theta/2)$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}a_n^*=1+i\cot an\,(\theta/2)}$$

Partie II.

1.

1. k étant fixé $n->\binom{n}{k}$ est un polynôme en n dont on peut trouver l'équivalent.

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\sim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{k!}$$

Par croissance comparées,la suite géométrique l'emporte sur la puissance. On a donc

$$\boxed{\forall k\leq n\ ,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}=0}$$

2. q étant fixé, $S_q(n,a)$ est alors une combinaison linéaire de suites de limite nulle (le nombre de termes de la somme est constant) et

$$\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$$

3. Par définition de la limite :

$$\forall\varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \ , \ n \geq n_1 \Longrightarrow |a_n| \leq \varepsilon_1$$

donc pour tout $k \geq n_1,\ |a_k| \leq \varepsilon_1$. La suite $S_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe n_2 tel que $\forall n \geq n_2,\ |S_q(n,a)| \leq \varepsilon_1$. On a alors pour $n \geq n_1$ et $n \geq n_2$

$$|a_n^*| = \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}a_k + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leq |S_q(n,a)| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}|a_k| \leq \varepsilon_1 + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon_1$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ $=2^n$, et donc

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n^*| \leq 2\varepsilon_1$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on prend $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, il existe donc n_1 et n_2 définis ci dessus . On prend $N = \max(n_1, n_2)$: $n \geq N \Rightarrow |a_n^*| \leq \varepsilon$
et on a montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n^*) = 0}$$

4. On introduit la suite b définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - l$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k - \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}l = a_n^* - l$$

d'après le calcul de $I.1$, avec $\alpha = l$. On se ramène donc au cas précédent :
comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(b_n) = 0$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(b_n^*)$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(a_n^*) = l}$$

5. Si $a_n = (-2)^n$ alors (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente.
Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

2.

1. Un calcul des premiers termes donne :
   - $a_0^* = a_0$, $T_0 = a_0$, $U_0 = S_0$
   - $a_1^* = \dfrac{a_0 + a_1}{2}$, $T_1 = \dfrac{3a_0 + a_1}{2}$, $U_1 = 3a_0 + a_1 = 2S_0 + S_1$
   - $a_2^* = \dfrac{a_0 + 2a_1 + a_2}{4}$, $T_2 = \dfrac{7a_0 + 4a_1 + a_2}{4}$, $U_2 = 7a_0 + 4a_1 + a_2 = 3S_0 + 3S_1 + S_2$
   - $a_3^* = \dfrac{a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3}{8}$, $T_3 = \dfrac{15a_0 + 11a_1 + 5a_2 + a_3}{8}$, $U_3 = 15a_0 + 11a_1 + 5a_2 + a_3 = 4S_0 + 6S_1 + 4S_2 + S_3$

   Le système qui donne la décomposition de U_i sur les S_j est triangulaire et ne pose aucun problème.

$$\boxed{U_0 = S_0,\ U_1 = 2S_0 + S_1,\ U_2 = 3S_0 + 3S_1 + S_2,\ U_3 = 4S_0 + 6S_1 + 4S_2 + S_3}$$

2. On reconnaît les coefficients binomiaux et on peut donc supposer que

$$U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$$

La formule précédente est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$. Soit $n \geq 3$ tel que la formule soit vraie au rang $n-1$.

$$U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}S_k$$

On remarque que

$$U_n = 2^n T_n = 2U_{n-1} + a_n^* = 2U_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. On coupe la somme en deux et on fait un changement d'indice pour faire apparaître les S_k dont on cherche le coefficient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (S_k - S_{k-1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{k} - \sum_{k=-1}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k = S_{-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \right) S_k + S_n$$

Avec l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, on a donc compte tenu de $S_{-1} = 0$:

$$U_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{:n-1} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \right) S_k + S_n = \sum_{k=0}^{:n-1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) S_k + S_n$$

La formule de Pascal : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [[1..n]]$: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ permet alors de montrer le résultat au rang n.

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} S_k + S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k}$$

C'est le même calcul que dans la démonstration par récurrence de la formule du binôme de Newton.

3. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ on a donc aussi $\lim_{n->+\infty} (S_{n-1}) = S$, la question $II.1$ indique que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{k-1} = S$$

Si une suite (v_n) converge , la suite (v_{n+1}) converge vers la même limite donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k-1} = S$$

On fait alors un changement d'indice

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=-1}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k = S$$

et donc comme

$$T_n = \frac{1}{2^n} U_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k$$

on obtient en utilisant $S_{-1} = 0$: $\lim (T_n) = 2S$. La série $\sum a_n^*$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n}$$

4. Si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum a_n$ diverge alors que $\sum a_n^*$ converge.

<u>Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de $\sum a_n$ et de $\sum a_n^*$.</u>

Partie III.

remarque 5/2 : corrigé rédigé sans utiliser les séries entières qui , il est vrai , simplifient un peu la dérivation et l'intégration termes à termes. Si vous citez des théorèmes justes votre réponse 5/2 sera, bien sur, juste.

1.

1. Pour tout réel x la série $\sum \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ converge absolument par majoration :$0 \leq \left|\dfrac{x^n}{(n+1)!}\right| \leq \dfrac{|x|^n}{n!}$ terme général d'une série convergente (de somme $\exp(|x|)$. $\underline{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
   ici , comme dans les questions suivantes on peut utiliser la règle de D'Alembert si $x \neq 0$ et traiter 0 comme un cas particulier.
2. On a
$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$$
3. On en déduit que $e^{-x} f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ si $x \neq 0$. En $x = 0$, $f(0) = 1$ (tous les termes de la somme valent 1 sauf le premier)
$$\boxed{e^{-x} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}}$$
   Remarque par convetion (et contiuité) $x -> x^0$ est la fonction constante $\tilde{1}$ sur $\mathbb{R}$ .Si vous avez pris une autre convention , vous avez une fonction continue par morceaux égale à $x -> e^{-x} f(x)$ sauf en un point , ce qui ne change rien dans ce problème puisqu'ensuite on intégre la fonction.

2.

1. On a au voisinage de $u = 0$: $\ln(1-u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$. Donc comme $\dfrac{1}{k}$ tend vers 0
$$0 \leq |w_k| = \left|\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right| \sim_{+\infty} \frac{1}{2.k^2}$$
   et c'est donc le terme général d'une série absolument convergente.
2. Soit $v_n = \sigma_n - \ln(n)$; on a $v_n - v_{n+1} = w_n$. Or, la série $\sum(v_n - v_{n+1})$ converge donc la suite (v_n) converge.
$$\boxed{\exists \gamma \in \mathbb{R}, \sigma_n = \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

3.

1. On a donc $\sigma_n \sim_{+\infty} \ln(n) << n$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{\sigma_n x^n}{n!}\right| << \frac{n|x|^n}{n!} = |x| \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$$
   La série $\sum \dfrac{\sigma_n}{n!} x^n$ converge absolument par majoration par une série convergente .
   Pour montrer que g est C^1 et calculer g' on utilise le théorème de dérivation sous le signe $\sum$:
   - la série $\sum \dfrac{\sigma_n}{n!} x^n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$
   - $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left(x -> \dfrac{\sigma_n}{n!} x^n\right)$ est C^1 de dérivée $\begin{cases} \left(x -> \dfrac{\sigma_n}{(n-1)!} x^{n-1}\right) \text{ si } n \geq 1 \\ 0 \text{ si } n = 0 \end{cases}$
     remarque : si $n = 0$ et $x = 0$, 0^{-1} pose problème
   - La série $\sum \dfrac{\sigma_n}{(n-1)!} x^{n-1}$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ car sur $[a, b]$ on a, en posant $A = \max(|a|, |b|)$:
$$\left|\frac{\sigma_n}{(n-1)!} x^{n-1}\right| \leq \frac{\sigma_n}{(n-1)!} A^{n-1}$$
     série convergente car $\dfrac{\sigma_n}{(n-1)!} A^{n-1} << \dfrac{n}{(n-1)!} A^{n-1} \sim \dfrac{A^{n-2}}{(n-2)!} A$ terme général d'une série convergente.
   - Donc la somme de la série est C^1 sur $\mathbb{R}$
$$\boxed{g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{(n-1)!} x^{n-1}}$$

2. On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)-g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma_{n+1}}{n!}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma_{n+1}-\sigma_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=f(x)$$

car $\sigma_{n+1}-\sigma_n=\dfrac{1}{n+1}$ que n soit nul ou non nul.

3. On a donc une équation différentielle linéaire du premier ordre.
   - équation homogène : $g'-g=0$: solutions du type $g_h=\lambda\exp$
   - variation de la constante : si $g=\lambda.\exp$ vérifie $g'-g=f$on a pour tout x réel :

   $$\big(\lambda'(x)\exp(x)+\lambda(x)\exp(x)\big)-\lambda(x)\exp(x)=f(x)$$

   donc $\lambda'(x)=f(x)\exp(-x)$.Il existe une constante C telle que $g(x)=\left(C+\displaystyle\int_0^x\exp(-t)f(t)dt\right)\exp(x)$. Or si $x=0$ on a $g(x)=0$ car $\sigma_0=0$

   $$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ g(x)=\exp(x)F(x)}$$

4.

1. F est une primitive de la fonction continue sur $\mathbb{R}$: $x->\begin{cases}\dfrac{1-e^{-x}}{x}\text{ si }x\neq 0\\ 1\text{ si }x=0\end{cases}$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ e^{-x}f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}=\frac{1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n-1}$$

La formule restant vraie si $x=0$.
On peut intégrer terme à terme cette série par converrgence normale.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n-1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$
- pour tout n : $x->\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que $x->\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n-1}=xf(x)$
- On a convergence normale sur tout segment $[a,b]$: $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n-1}\right|\leq\dfrac{A^{n-1}}{n!}\leq\dfrac{A^{n-1}}{(n-1)!}$
- Comme $F(0)=0$, on obtient

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n.n!}x^n}$$

On peut aussi prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum\int_0^x\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n!}t^{n-1}\right|dx=\sum\frac{|x^n|}{n.n!}$

2. 5/2 : On "écrit que $g(x)=F(x).\exp(x)$ on calcule le produit de Cauchy des deux séries entières définissant $F(x)$ et $\exp(x)$. par identification (unicité du développement en série entière) on a l'expression voulue.

5. En regroupant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, on a

$$\tau_{2n}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$$\sigma_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

En faisant la différence, on obtient

$$\sigma_{2n}-\tau_{2n}=\sigma_n$$

Or $\sigma_n=\ln(n)+\gamma+o(1)$ donc $\tau_{2n}=(\ln(2n)+\gamma+o(1))-(\ln(n)+\gamma+o(1))=\ln(2)+o(1)$.

La suite τ_{2n} tend vers $\ln(2)$. comme $\tau_{2n+1}=\tau_{2n}-\dfrac{1}{2n+1}$ tend aussi vers $\ln(2)$, la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(2)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln(2)$$

6.

1. On utilise de nouveau $\sigma_n \sim \ln(n) << n$
   - si $|x| \geq 1$: $\sigma_n |x|^n > \sigma_n$ diverge vers l'infini : divergence grossière
   - si $|x| < 1$ $\sigma_n |x|^n << n |x|^n$ donc $n^2 \sigma_n |x|^n$ tend vers 0 : on a convergence absolue.
2. sur $[0, 1[$, chaque fonction $x- > x^n$ est croissante et comme $\sigma_n \geq 0$: $\boxed{\phi \text{ est croissante sur } \boxed{[0,1[}}$.
3. On a $\phi(1/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} n! \gamma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} n!}{k k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On reconnaît $\sum a_n^*$ si on pose $a_n = \frac{(-1)^{nn1}}{n}$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$

   Comme on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ln(2)$: La partie II montre que $\sum a_n^*$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\ln(2)$

$$\boxed{\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln(2)}$$

Il restait un petit bout de problème pour compléter l'étude de la fonction ϕ .