D'après CCP 2006 -PSI
première épreuve

Notations.

Pour tout entier naturel n, on note :

- $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$,
- $[|0, n|]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{k}$ le nombre de parties ayant k éléments d'un ensemble de n éléments, pour $k \in [|0, n|]$.

On rappelle :

- la valeur de $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in [|0, n|]$,
- Enfin, si n est un entier naturel non nul, on note σ_n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et on pose $\sigma_0 = 0$.

Objectifs.

Dans les parties I et II, on étudie un procédé de sommation.
La partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier à une fonction ϕ à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes.
Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.
A toute suite complexe a, on associe la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$.

Partie I : deux exemples.

1. **Cas d'une suite constante.**
   Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on suppose que la suite a est constante définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

   1. Montrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   2. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.
   3. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

2. **Cas d'une suite géométrique.**
   Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

   1. Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

2. On suppose que $|z| < 1$.
   - Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
   - Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.
3. On suppose que $|z| \geq 1$.
   - Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$?
   - Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?
   - On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
     Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : étude du procédé de sommation.

1. **Comparaison des convergences des deux suites.**
   1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un entier k <u>fixé</u>, $k \in [|0, n|]$.
      Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
      En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   2. Soit a une suite et q un entier naturel <u>fixé</u>.
      On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?
   3. On suppose que (a_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
      Ecrire, avec des quantificateurs, la définition de la limite.
      Montrer que (a_n^*) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   4. On suppose que (a_n) tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de (a_n^*) lorsque n tend vers $+\infty$?
   5. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

2. **Comparaison des convergences des séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$.**

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

   1. Pour $n \in [|0, 3|]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

2. On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [|0, n|]$:

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question $II.2.1$?

Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [|0, n|]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

3. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Déduire de la question $II.1$ appliquée à la suite $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ que la série $\sum a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4. La convergence de la série $\sum(a_n)$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum(a_n^*)$?

Partie III : une étude de fonctions.

On rappelle que : $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0 = 0$.

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \; ; \; g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \; ; \; \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n \, ; \, F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) \, dt$$

1. **Etude de f.**

   1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   2. Expliciter $xf(x)$ pour tout x réel.
   3. Expliciter $e^{-x} f(x)$ pour tout x réel.

2. **Etude de σ_n**

   Soit $w_k = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) - \dfrac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} w_k$ est convergente.
   2. En déduire que la suite de terme général $\sigma_n - \ln(n)$ admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque n tend vers $+\infty$.

3. **Etude de g.**

   1. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   2. On désigne par g' la dérivée de la fonction g.
      Exprimer $g' - g$ en fonction de f.
   3. En déduire une expression de g en fonction de F et de exp .

4. **La fonction F.**

1. Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ et montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1).(n+1)!}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k k!(n-k)!}$$

   On admettra que :

$$\gamma_n = \frac{\sigma_n}{n!}$$

5. **La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.**

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n.

   Montrer en utilisant $III.2$ que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

6. **Etude de la fonction ϕ.**

   1. Montrer que le domaine de définition de la fonction ϕ est $]-1, 1[$
   2. Etudier les variations de ϕ sur $[0, 1[$.
   3. En utilisant les résultat de la partie II et des questions $III.4$ et $III.5$ expliciter la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.