



CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B

durée 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

Exercice 1

\mathbf{R} désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel non nul.

Dans tout l'exercice, (a_n) est une suite d'éléments non nuls de \mathbf{R} . On lui associe la suite

(p_n) définie par : $p_n = \prod_{k=1}^n a_k$. Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite.

Lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) pour limite.

Première partie

1° Donner un exemple de suite (a_n) , telle que (p_n) converge vers $p = 0$.

2° Prouver que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.

3° On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$a_n > 0, \text{ pour } n > n_0.$$

On pose, pour n supérieur à n_0 , $q_n = \prod_{k=n_0+1}^n a_k$.

- Pour n supérieur à n_0 , exprimer q_n en fonction de p_n et de p_{n_0} .
- Montrer que, si la série $\sum \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge et que p est non nul.
- On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans chacun de ces deux cas la limite de la suite (p_n) .

Dans ce qui suit, on définit u_n par : $a_n = 1 + u_n$.

Tournez la page S.V.P.

4° On suppose dans cette question que, pour tout n , on a : $u_n \geq 0$.

Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

5° On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

b) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

6° Prouver que, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

Deuxième partie

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre. On pourra les traiter en utilisant les résultats établis dans la première partie, à condition de s'y référer de manière très précise.

1° Etudier la convergence et déterminer la limite de (p_n) dans les deux cas suivants :

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$.

b) $a_n = 1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

2° On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose : $a_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{-t^2} dt$. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3° Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $1 + u_n \neq 0$ pour $n \geq 1$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \quad , \quad v_n = \frac{u_n}{p_n} .$$

a) Pour $n > 1$, exprimer v_n en fonction de $\frac{1}{p_n}$ et de $\frac{1}{p_{n-1}}$.

b) On suppose dans cette question que la série $\sum u_n^2$ converge.

i) Etablir que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

ii) La convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum u_n$? Justifier.

c) Déterminer une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

4° Soit α un réel strictement positif, et $a_n = 1 + \sin\left(\frac{c}{n^\alpha}\right)$ où c est un nombre réel tel que pour tout n , a_n soit non nul.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et c pour que (p_n) converge vers 0.

b) On suppose que : $\alpha = 1$.

Etudier la convergence de la série $\sum p_n$.

[On pourra utiliser la convergence vers un réel noté γ de la suite (t_n) où

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)] .$$