CENTRALE TSI 2009

Partie I

soit $\phi : t-> \dfrac{e^t}{1°t}$
On remarque que les bornes de l'intégrale sont dans le bons sens si $x \geq 0$ et dans le mauvais si $x < 0$.
I.A.1) domaine de définition :
Comme $x-> x$ est définie sur $\mathbb{R}$ f est définie en x si et seulement si $\displaystyle\int_0^x \phi(t)dt$ existe .

Au sens premier $\displaystyle\int_0^x \phi(t)dt$ existe si et seulement si la fonction ϕ est continue par morceaux sur le segment
Au sens généralisé on regarde si la fonction ϕ est continue sur l'intervalle et si on a convergence de l'intégrale impropre :

- ϕ est continue sauf si $t = -1$.Si $t = -1$, ϕ n'est pas définie ni prolongeable par continuité à gauche ou à droite.
- si $x < -1$, la fonction ϕ n'est pas continue par morceaux sur $]x, 0[$. L'intégrale ne peut pas être définie
- si $x = -1$ $\phi(t) \sim_{t->-1} \dfrac{e^{-1}}{1+t}$. Les fonctions étant positives $\displaystyle\int_{-1}^0 \phi$ diverge.
- si $x > -1$ ϕ est continue sur $[x, 0]$ ou $[0, x]$ $\displaystyle\int_0^x \phi$ existe et est la primitive de ϕ nulle en 0 . f est donc définie C^1 par produit de fonctions C^1

I.A.2) on a $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \phi(t)dt + x\phi(x)$

- si $x > 0$ les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens et ϕ est positive. donc $f'(x)$ est positive comme somme de deux réels positifs .Donc f croît sur $\mathbb{R}^+$
- si $x < 0$ les bornes sont dans le mauvais sens et f'est négative: $\boxed{f \text{ décroît sur }]-1, 0]}$
- Remarque : si on ne voit pas que les deux termes sont de même signe on peut remarquer que f" sera simple (la primitive disparaît) . Le calcul complet donne $f"(x) = \dfrac{x^{2+2x+2}}{(x+1)^2}e^x$. On en déduit que f' est croissante et comme $f'(0) = 0$ on a le tableau de signe de f' .

I.A.3) Sur $]-1, 0]$ $f(x) = (-x)\displaystyle\int_x^0 \phi(t)dt$. Comme $t \in [x, 0]$, $e^t \geq e^x$ et donc (bornes dans le bon sens et $-x \geq 0$) :

$$f(x) \geq (-x)\int_x^0 \frac{e^x}{t+1}dt = (-x)e^x \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Si x tend vers -1 , le minorant tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{-1}(f)=+\infty}$$

Remarque : on peut aussi partir de $e^t \leq e^{-1}$. Ou montrer que $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^t}{1+t}dt$ diverge (fonction continue positive équivalente en -1 à $\dfrac{1/e}{1+t}$.
I.A.4) Pour $x > 0$

$$f(x) \geq x\int_0^x \frac{1}{1+t}dx = x\ln(1+x)$$

et donc

$$\boxed{\lim_{+\infty}(f) = +\infty}$$

Et même $\displaystyle\lim_{+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = +\infty$. On a donc une branche parabolique.
Remarque : on peut aussi partir de $\dfrac{1}{1+t} \geq \dfrac{1}{1+x}$ t utiliser une primitive de $t-> e^t$. Ou encore étudier la divergence de l'intégrale impropre.
I.B.1) Rappel sur la méthode des trapèzes.: Si F est continue sur $[a, b]$, on partage $[a, b]$ en $(p+1)$ points $x_i = a + i\dfrac{b-a}{p}$. Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on approche la courbe par sa corde.

L'aire "sous" la corde est l'aire du trapèze

$$A_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)\,(F(x_{i+1}) + F(x_i))}{2}$$

ce qui peut se retrouver (même si F est négative ou change de signe) en calculant l'équation de la corde . L'aire sous la courbe est approchée par la somme des aires des trapèzes :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^{p-1} A_i = \frac{b-a}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\frac{F(x_{i+1}) + F(x_i)}{2} = \frac{b-a}{p}\left(\frac{\sum_{i=0}^{p-1}(F(x_{i+1}) + \sum_{i=0}^{p} F(x_i)}{2}\right) \\ &= \frac{b-a}{p}\left(\frac{1}{2}F(x_0) + \sum_{i=1}^{p-1} F(x_i) + \frac{1}{2}F(x_n)\right) \text{ , en faisant un changement d'indice.} \end{aligned}$$

Ici en prenant $a = 0, b = \dfrac{k}{n}$ et $p = k$:

$$\begin{aligned} \int_0^{k/n} \phi(t)dt &\approx \frac{k/n}{k}\left(\frac{1}{2}\phi(0) + \sum_{i=1}^{p-1}\phi\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{1}{2}\phi\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}.1 + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\exp\left(\frac{i}{n}\right)}{1+\frac{i}{n}} + \frac{1}{2}\frac{\exp\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}\right) \\ &\approx \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\exp\left(\frac{i}{n}\right)}{n+i} + \frac{1}{2}\frac{\exp\left(\frac{k}{n}\right)}{n+k} \end{aligned}$$

On multiplie par $x_k = \dfrac{k}{n}$ et on a la formule du sujet.

Le Σ existe si $k > 0$. Si $k = 1$ on convient $\displaystyle\sum_{i=1}^{0} = 0$

<u>remarque avec les sommes de Riemann:</u>:On peut aussi passer par les sommes de Riemann :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(a + k\frac{b-a}{n}) \text{ et } \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(a + (k+1)\frac{b-a}{n})$$

sont les deux sommes de Riemann associées à f sur $[a, b]$ et elles convergent vers l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$. Si on fait la demi somme et si on change l'indice dans Σ_n on retrouve :

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(b)}{n}\right) = \int_a^b f$$

I.B.2) On prend l'approximation de $\displaystyle\int_{k/n}^{0}\phi$ en prenant $a = \dfrac{k}{n}$, $b = 0$, $p = -k$

$$\begin{aligned} \int_{k/n}^{0}\phi(t)dt &\approx \frac{-k/n}{-k}\left(\frac{1}{2}\phi(\frac{k}{n}) + \sum_{i=1}^{-k-1}\phi\left(\frac{k+i}{n}\right) + \frac{1}{2}\phi\left(0\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}.\frac{\exp\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}} + \sum_{i=1}^{-k-1}\frac{\exp\left(\frac{k+i}{n}\right)}{1+\frac{k+i}{n}} + \frac{1}{2}.1\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\frac{\exp(k/n)}{n+k} + \sum_{i=1}^{-k-1}\frac{\exp\left(\frac{k+i}{n}\right)}{n+k+i} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On multiplie alors par $-x = -\dfrac{k}{n}$

$$f(x) \approx \frac{-k}{n}\left(\frac{1}{2}\frac{\exp(k/n)}{n+k} + \sum_{i=1}^{-k-1}\frac{\exp\left(\frac{k+i}{n}\right)}{n+k+i} + \frac{1}{2}\right)$$

I.B.3) On garde l'idée en ne calculant qu'une seule fois l'aire de chaque trapèze :
$A_0 = 0$ et pour $k > 0$, $A_k = A_{k-1} + \dfrac{1}{2n}\left(\phi(\dfrac{k}{n}) + \phi\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\right)$ et $y_k = \dfrac{k}{n}A_k$ que l'on mémorise dans une liste y
Même principe pour les $k < 0$.Ce qui peut donner :
J'ai séparer pour la lisibilité les deux procédures. On peut les mettre bout à bout et récupérer les résultats dans une seule liste.

Pour toutes le valeurs de n , on répète ainsi 2 fois (et seulement 2 fois même si n est grand) le calcul de chaque $\phi(k/n)$

```
> Digits:=3:        {3 décimales de calcul}
> phi:=t->exp(t)/(1+t);
> approx1:=proc(n,m) local A,y,k;
  A:=0;y[0]:=0;
 for k from 1 to m do
        A:=evalf(A+1/n/2*(phi(k/n)+phi((k-1)/n)));
        y[k]:=A*k/n;
 od;
 y;
end;
> f:=approx1(4,8):seq(f[k],k=0..8);
```

$$0, 0.0632, 0.260, 0.605, 1.13, 1.86, 2.85, 4.18, 5.90$$

```
> approx2:=proc(n,m) local A,y,k;
 A:=0;y[0]:=0;
 for k from -1 to m by -1 do
     A:=evalf(A+1/n/2*(phi(k/n)+phi((k+1)/n)));
      y[-k]:=-A*k/n;
od;
y;
end;
> f:=approx2(4,-3):seq(f[k],k=0..3);
```

$$0, 0.0638, 0.268, 0.695$$

On peut être encore plus exigeant en calculant chaque $\phi(k/n)$ une fois et une seule et en mémorisant cette valeur:

```
> approx1:=proc(n,m) local A,y,k,v,w;
  A:=0;y[0]:=0;w:=phi(0);
 for k from 1 to m do
        v:=w;w:=phi(k/n)
        A:=evalf(A+1/n/2*(v+w));
        y[k]:=A*k/n;
 od;
 y;
end;
```

I.B.4) Programmer sa machine , ou définir la fonction ϕ , faire les additions à la machine en écrivant sur papier les y obtenu. Le but de la question est le graphe de f . donc je pense que le correcteur atttend des valeurs numériques approchée et pas de somme d'exponentielles non simplifié.

I.C.1) ϕ est C^∞ au voisinage de 0 . Donc f l'est aussi , et donc f admet un développement limité à tout ordre en 0.

I.C.2) On sait calculer le développement limité d'un produit et celui d'une primitive.Partant des DL de e^x et $\dfrac{1}{1+x}$ on peut déterminer celui de ϕ puis celui de f.

Par prudence on peut partir des deux D.L. à l'ordre 5 mais on peut gagner un peu de temps :

Pour avoir f à l'ordre 5 , il suffit d'avoir la primitive à l'ordre 4 (à cause du facteur x) donc ϕ à l'ordre 3 (la primitive d'un DL_n est un DL_{n+1})

On a :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

et

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$$

donc

$$\phi(t) = 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

On primitive :

$$\int_0^x \phi(t)dt = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

et donc

$$\boxed{f(x)=x^2+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{12}+o(x^5)}$$

I.C.3) On peut calculer dans le cas général :
Onb fait le produit des deux parties régulières (polynômes) et on ne garde que les termes de degré $\leq N$.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \left(\sum_{k=0}^{N}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k x^k\right)+o(x^N)\\ &= \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{p=0}^{k}(-1)^{p-k}\frac{1}{k!}\right)x^k+o(x^N)\end{aligned}$$

et donc

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k+1}\left(\sum_{p=0}^{k}(-1)^{k-p}\frac{1}{p!}\right)x^{k+2}+o(x^{N+2})$$

Soit pour $k\geq 0$: $\lambda_{k+2}=\dfrac{1}{k+1}\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{k}(-1)^{p-k}\frac{1}{k!}\right)$

$$\boxed{\forall n\geq 2\ ,\ \lambda_n=\frac{1}{n-1}\sum_{p=0}^{n-2}\frac{(-1)^{n-p}}{p!}}$$

Remarque : On peut aussi utiliser Taylor Young et calculer $f^{(n)}$ en utilisant deux fois Leibniz:

$$f^{(n)}(x)=x\left(\int_0^x\phi\right)^{(n)}(x)+n.1.\left(\int_0^x\phi\right)^{(n-1)}(x)+\sum 0$$

donc $f^{(n)}(0)=\phi^{(n-2)}(0)$. Puis :

$$\begin{aligned}\phi^{(n-2)}(x) &= \left(e^x.\frac{1}{1+x}\right)^{(n-2)}=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(e^x)^{n-2-k}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k)}\\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}e^x\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}\end{aligned}$$

et prendre la valeur en 0 .
I.C.4) On a donc

$$(n)\,\lambda_{n+1}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+1-p}}{p!}=-\left(\sum_{p=0}^{n-2}\frac{(-1)^{n-p}}{p!}\right)+\frac{1}{(n-1)!}=-(n-1)\lambda_n+\frac{1}{(n-1)!}$$

ce qui donne :

$$\boxed{\forall n\geq 2:\ \lambda_{n+1}=\frac{1-n}{n}\lambda_{n-1}+\frac{1}{n!}}$$

Si $n=1$, $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=1$. $\lambda_2=\dfrac{-1}{2}\lambda_1+\dfrac{1}{1!}$ est vérifié.
I.C.5) On utilise x comme variable d'écriture. x ne doit pas être affecté avant.

```
coef:=proc(n) local k,dl;
 dl[0]:=0;dl[1]:=0;
 for k from 1 to n-1 do dl[k+1]:=1/(k!)+(1-k)/k*dl[k] od;
 add(dl[k]*x^k,k=0..n)
 end;
> coef(5)
```

$$x^2+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{12}$$

Une équation différentielle du premier ordre.

II.A.1) C'est un problème de Cauchy. Sur $]-1,+\infty[$ on a

$$y' = \frac{x}{x+1}y$$

équation différentielle **linéaire** avec $F(x) = \dfrac{x}{x+1}$ **continue** sur $]-1,+\infty[$. Il existe une unique solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$

II.A.2) On sait que :

$$\forall x \geq -1 \ , \ \phi(x) = A \exp\left(\int \frac{x}{1+x}\right)$$

On écrit $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$, $\phi(x) = A\dfrac{\exp(x)}{1+x}$ et comme $\phi(0) = 1$

$$\boxed{\forall x \geq -1 \ , \ \phi(x) = \frac{\exp(x)}{1+x}}$$

II.B.1)

On peut déjà remarquer que $a_0 = \phi(0) = 1$ et $a_1 = \phi'(0) = 0$, en prenant $x = 0$ dans l'équation différentielle.

On peut dériver la série entière sur le disque ouvert de convergence :

$$\begin{aligned} x \in \ ]-R,R[\ , \ (1+x)\,\phi'(x) - x\phi(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n a_n + (n+1) a_{n+1} - a_{n-1}\right) x^n \end{aligned}$$

par unicité du développement en série entière on obtient :

$$\boxed{a_0 = 1, a_1 = 0, \forall n \geq 1, n a_n + (n+1) a_{n+1} - a_{n-1} = 0}$$

II.B.2) Vérifions par récurrence double que a_n est défini unique et $|a_n| \leq 1$

- vrai pour a_0 et a_1
- si a_{n-1} et a_n existent et sont uniques $a_{n+1} = \dfrac{a_{n-1} - n a_n}{n+1}$ existe et est unique (dénominateur non nul).
- si $|a_{n-1}| \leq 1$ et $|a_n| \leq 1$ on a $a_{n+1} \leq \dfrac{|a_{n-1}| + n\,|a_n|}{n+1} \leq \dfrac{1+n}{n+1} = 1$
- La propriété est vérifié par récurrence.

II.B.3) On a donc pour tout x $|a_n x^n| \leq |x^n|$. Or $\sum x^n$ converge absolument sur $]-1,1[$ donc par majoration $\sum a_n x^n$ converge absolument sur cet intervalle et donc $R \geq 1$

La série entière est solution de l'équation sur $]-1,1[$ et vérifie la même condition initiale que ϕ . les deux fonctions sont égales et ϕ est développable en série entière sur $]-1,1[$;

Remarque : on peut aussi ne pas déduire : ϕ est le produit de deux fonctions $t- > 1/(1+t)$ et $t- > \exp(t)$ développables en série entière sur $]-1,\&[$ donc ϕ est développable aen série entière sur $]-1,1[$. L'unicité de la solution du problème da Cauchy assurant alors que $\phi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-1,1[$

II.B.4) On a donc $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Si la série entière a un rayon de convergence $R > 1$. la somme est continue sur $[-1,1] \subset]-R,R[$. Absurde car ϕ ne peut être prolongée par continuité en 1. On a donc $R = 1$.

Ce n'est pas tout à fait le plan de la question mais je ne vois pas comment pour prouver la divergence de la série avant de parler de rayon de convergence.

II.C.1) De $n a_n + (n+1) a_{n+1} - a_{n-1} = 0$ on déduit : $(n+1)(a_{n+1} - a_n) = a_n - a_{n-1}$. soit $(n+1) b_{n+1} = b_n$. $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{(n+1)!}$ donc $b_n = \dfrac{1}{n!} b_1$ or $b_1 = a_1 + a_0 = 1$;

$$\boxed{\forall n \geq 1 \ , \ b_n = \frac{1}{n!}}$$

II.C.2) on a donc pour $n \geq 1$ $a_n = \dfrac{1}{n!} - a_{n-1} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n-1)!} + a_{n-2} = ... = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} + (-1)^n a_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!}$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!}}$$

II.C.3) Comme on a : $\forall n \geq 2$, $\lambda_n = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{p=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-p}}{p!}$ il est évident que

$$\boxed{\forall n \geq 2\ ,\ \lambda_n = \frac{a_{n-2}}{n-1}}$$

II.D.1) une écriture récursive donnera

```
> u:=proc(n) option remember; if (n=0) then u0 elif n=1 then u1 else -((n-1)*u(n-1)-u(n-2))/(n+1) fi;end;
```

On peut mémoriser dans un tableau et récupérer toutes les valeurs de u_n

```
> u:=proc(n) local k; u[0]:=u0;u[1]:=u1; for k from 1 to n-1 do u[k+1]:=-(k*u[k]-u[k-1])/(k+1) ; od; u;end;
```

On peut économiser la place mémoire n ne mémorisant pas les valeurs intermédiaires. on utilise 3 variables a représente u(k-1) , b représente u(k) et c représente u(k+1)

La procédure obtenue ne marche pas si $n = 0$.

```
> u:=proc(n) local a,b,c,k ; b=u0;c:=u1; for k from 1 to n-1 do a:=b;b:=c;c:=-(n*a-b)/(n+1); do;c;end;
```

II.D.2) E est un sous ensemble de l'espace vectoriel des suites réels , non vide (la suite nulle est dans E).

E est stable par combinaison linéaire . Si (u_n) et (v_n) sont dans E et si λ et μ sont des scalaires :

$\forall n \geq 1 : (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) = \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda \dfrac{-nu_n + u_{n-1}}{n+1} + \mu \dfrac{-nv_n + v_{n-1}}{n+1} = \dfrac{-n(\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda u_{n-1} + \mu v_{n-1})}{n+1}$ donc $(\lambda u_n + \mu v_n) \in E$

II.D.3) L'application proposée est

- linéaire
- surjective : récurrence double comme au **II.B.2)**
- injective : Si $u_0 = u_1 = 0$ alors par récurrence double :$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$:
  - vrai pour u_0 et u_1
  - si $u_{n-1} = u_n = 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{u_{n-1} - nu_n}{n+1} = 0$
- donc on a un isomorphisme qui conserve les dimensions.$\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

  $$\boxed{E \text{ est un plan vectoriel}}$$

  remarque : Une base sera composé des deux suites (U_n) et (V_n) définie par :

  -> $U_0 = 1, U_1 = 0$, $\forall n \geq 1$, $U_{n+1} = \dfrac{U_{n-1} - nU_n}{n+1}$

  -> $V_0 = 0, V_1 = 1, \forall n \geq 1$, $V_{n+1} = \dfrac{V_{n-1} - nV_n}{n+1}$

II.D.4) On cherche les suites de E telles que $\exists r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \kappa r^n$. Si on reporte dans l'équation :

$$\forall n \geq 1\ ,\ (n+1)\kappa r^{n+1} + n\kappa r^n - \kappa r^{n-1} = 0$$

$r = 0$ n'est pas possible à cause de $n = 1$. Si $\kappa = 0$ on a une solution évidente (la suite nulle) sinon $\kappa \neq 0$.

On peut alors diviser par κr^{n-1} : $(n+1)r^2 + nr - 1 = 0$. Le polynôme en n a une infinité de racines : ses coefficients sont nuls : $r^2 + r = 0$ et $r^2 = 1$. Donc $r = -1$

On vérifie que $r = -1$ est solution.Les suites géomtriques sont les suites $(\kappa(-1)^n)$.

remarque : on peut aussi résoudre par rapport à r trouver deux racines et constater que une seule des 2 est constante. donc défini une suite géométrique.

II.D.5) On a deux suites solutions $(-1)^n$ et a_n . La bijection de **II.D.3)** donne $(-1)^n -> (1, -1)$ et $a_n -> (1, 0)$. Les images sont libres donc par isomorphisme les antécédents aussi.

On a deux éléments libres dans un plan , c'est une base.

On peut donc décomposer $u_n = \lambda a_n + \mu(-1)^n$. Les conditions initiales donnent $\lambda + \mu = u_0, -\mu = u_1$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = (u_0 + u_1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} - u_1(-1)^n}$$

Une équation du second ordre.

III.A.1) Si y est une solution polynômiale de degré d , les trois termes de l'équation sont de degrés respectifs , $d+1, d+2, d+2$. Donc les deux termes de degré $d+2$ doivent s'annuler. et donc :

$$\forall x, -da_d x^{d+2} + a_d x^{d+2} = 0$$

comme $a_d \neq 0$, $d = 1$.
III.A.2) On pose $y = ax + b$ et on reporte dans l'équation $\forall x$: $ax(x^2 + 2x + 2) = (ax + b)(x^2 + 2x + 2)$, d'où $b = 0$ et a quelconque. $S = \mathrm{Vect}(x -> x)$
III.B.1) On peut faire une variation de la constante en posant $\forall x \neq 0$, $y(x) = a(x).x$. La condition $x \neq 0$ permet de dire que $a(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ est C^2 sur le domaine , et permet de diviser par x dans les calculs.
On a $y(x) = a(x).x$ donc $y'(x) = a(x) + a'(x).x$ et $y"(x) = 2a'(x) + a"(x).x$ et donc :

$$x^2(x+1)\left(2a'(x) + a"(x).x\right) - x(x^2+2x+2)\left(a(x) + a'(x).x\right) + (x^2+2x+2)a(x) = 0$$

On a donc

$$x^3(x+1)a" - x^4 a'(x) = 0$$

Et donc $a'(x)$ est solution de $(x+1)Y' - xY = 0$ (on peut diviser $x \neq 0$)
III.B.2) On en déduit que $a' = \phi$ est une solution de l'équation . On peut prendre $a(x) = \displaystyle\int_0^x \phi(t)dt$ et donc une seconde solution est : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $y_2(x) = x\displaystyle\int_0^x \phi(t)dt = f(x)$.
Comme $\displaystyle\int_0^x \phi(t)dt$ n'est pas constante y_1 et y_2 ne sont pas proportionnels.
Sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$ on a : $y" = \dfrac{(x^2+2x+2)}{x(x+1)}y' + \dfrac{(x^2+2x+2)}{x^2(x+1)}y$. l'équation est linéaire et les deux fonctions $x -> \dfrac{(x^2+2x+2)}{x(x+1)}$ et $x -> \dfrac{(x^2+2x+2)}{x^2(x+1)}$ sont continues sur chaque intervalle. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 . On a donc une base.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sur }]-1,0[\ ,\ \exists (A_0,B_0)\ y(x) = A_0 x + B_0 f(x) \\ \text{sur }]0,+\infty[\ ,\ \exists (A_1,B_1)\ y(x) = A_1 x + B_1 f(x) \end{array}}$$

III.B.3) Pour faire l'étude sur $]-1,+\infty[$ il faut faire un recollement en 0 :

- $\lim\limits_{0^+}(y(x)) = \lim\limits_{0}(y(x)) = 0$ pour toute valeur des constantes.
- On a $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \phi(t)dt + x\phi(x)$ nulle en 0 . Donc $y'(0^+) = A_1$ et $y'(0^-) = A_0$. On a un prolongement C^1 si et seulement si $A_0 = A_1$
- On a $f"(x) = 2\phi(x) + x\phi'(x)$ donc $f"(0) = 1$. donc $y"(0^+) = B_1$ et $y"(0^-) = B_2$. On a un prolongement C^2 si et seulement si $B_0 = B_1$

$$\boxed{\text{les seules solutions } C^2 \text{ sur }]-1,+\infty[\text{ sont les fonctions } x -> Ax + Bf(x)}$$

On sait que $\lim\limits_{-1^+}(f) = +\infty$ donc $\overset{+}{\lim\limits_{-1}}(y) = \begin{cases} +\infty \text{ si } B > 0 \\ -A \text{ si } B = 0 \\ -\infty \text{ si } B < 0 \end{cases}$. Les seules solutions éventuellement prolongeables sont les fonctions $y = Ax$. On ces fonctions sont solutions sur $\mathbb{R}$ par le **A.III**
III.C.1) L'étude du prolongement a montré que $\begin{cases} \text{si } \alpha = 0 \text{ , toutes les fonctions sont solutions (une infinité)} \\ \text{si } \alpha \neq 0 \text{ il n'existe pas de solution.} \end{cases}$
III.C.2) Les mêmes calculs ont montrés que $y'(0) = A, y"(0) = B$.
Il existe une unique solution vérifiant $y'(0) = \beta, y"(0) = \gamma$ la fonction $x -> \alpha x + \beta f(x)$