ESIM 2003 – MP
MATHÉMATIQUES 2
PARTIE I

1. Une fonction f est développable en série entière au voisinage de zéro si et seulement si il existe une série entière $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel r strictement positif et inférieur à R tels que $\forall x \in]-r, r[, \;\; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2. plan : f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, sur $\mathbb{R}^*$ les dérivées ont du type $f^{(n)} = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-1/x^2}$ avec P_n et Q_n polynômiaux , toutes les dérivées ont une limite nulle en zéro et donc la série de Taylor de f converge sur $\mathbb{R}$ et vaut $0 \neq f(x)$ pour $x \neq 0$.

   - L'application f est déjà de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de telles fonctions.
   - une récurrence permet de prouver l'existence de P_n et Q_n :
     - On a $P_0 = Q_0 = 1$.
     - Sur $\mathbb{R}^*$ $f\prime(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ donc $P_1 = 2$, $Q_1 = X^3$ .Ce sont bien des polynômes.
     - Si $f^{(n)} = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-1/x^2}$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_n'(x)}{Q_n(x)^2} e^{-1/x^2} + \left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right)\left(\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}\right) \\ &= \frac{\left(P_n'(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_n'(x)\right)x^3 + P_n(x)Q_n(x)}{Q_n(x)^2} e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

       d'où $P_{n+1} = X^3 P_n' Q_n - X^3 P_n Q_N' + P_n Q_n$ et $Q_{n+1} = Q_n^2$ qui sont bien des polynômes comme combinaison linéaire et produits de polynômes.
   - On en déduit par récurrence encore, que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ tout entier et que $f^{(n)}(0) = 0$:
     - $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ donc le choix de $f(0)$ assure la continuité
     - Si on pose $u = 1/x^2$ $f'(x) = 2u^{3/2} e^{-u}$. si x tend vers 0 , tend vers $-\infty$ donc $f'(x)$ tend vers 0 par comparaison d'une puissance et d'une exponentielle.
       La fonction f est donc continue en , dérivable au voisinage de 0 et la dérivée admet en une limite finie . Donc d'après le théorème de prolongement d'une dérivée , f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim_{x->0}(f'(x)) = 0$
     - Supposons f de classe C^n sur $\mathbb{R}$; alors $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
       De plus si x tend vers 0 un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré donc il existe un réel λ et un entier (relatif) α tels que
$$f^{(n+1)}(x) \sim \lambda x^\alpha e^{-1/x^2} = \lambda u^{-\alpha/2} e^{-u}$$
       donc par croissance comparée $\lim_0 \left(f^{(n+1)}(x)\right) = 0$ et par le théorème précédent on déduit que f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n+1)}(0) = 0$.
   - f est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout n $f^{(n)}(0) = 0$. Si f est développable en série entière alors sur $]-r, r[$ $fx) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait que alors $a_n = n!\, f^{(n)}(0)$. Donc $f(x) = 0$, ce qui est faux si $x \neq 0$

$$\boxed{f \text{ n'est pas développable en série entière au voisinage de } 0}$$

3. **a)** On reconnaît dans $R_N(x)$ le reste de Taylor d'ordre N de h. Comme h est de classe C^{N+1} sur $[0, x]$ on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\boxed{R_N(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^N h^{(N+1)}(t)}{N!} dt}$$

   b) le changement de variable $t = u\frac{x}{y}$ C^1 sur $[0, y]$ transforme $[0, y]$ en $[0, x]$ et donne alors

$$R_N(x) = \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} \int_0^y \frac{(y-u)^N h^{(N+1)}(ux/y)}{N!} du$$

   Or sur $[0, a[$ la dérivée de $h^{(N+1)}$ est $h^{(N+2)}$ fonction positive. Donc $h^{(N+1)}$ est croissante sur $[0, a[$.
   donc si $0 < x/y < 1$, alors $\forall u \in [0, y]$, $h^{(N+1)}(ux/y) \leq h^{(N+1)}(u)$. Tous les produits ayant des facteurs positifs, on obtient immédiatement

$$R_N(x) = \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} \int_0^y \frac{(y-u)^N h^{(N+1)}(ux/y)}{N!} du \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} \int_0^y \frac{(y-u)^N h^{(N+1)}(u)}{N!} du = (\frac{x}{y})^{N+1} R_N(y)$$

Enfin, $R_N(y) - h(y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} y^n$ est une somme de quantités positives , donc est positif.

$$\boxed{0 \leq R_N(x) \leq (\frac{x}{y})^{N+1} h(y)}$$

4. **c) Soit** $x \in [0, a[$.

- si $x = 0$ $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est évident.
- si $x \int]0, a[$ prend y fixe dans $]x, a[$ .On a alors $\lim_{N \to +\infty} (\frac{x}{y})^{N+1} = 0$. L'encadrement précédent montrent donc que $\lim_{N \to +\infty} R_N(x) = 0$, c'est-à-dire que $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$$\boxed{h \text{ est somme de sa série de Taylor sur } [0, y] \text{ sur } [0, a]}$$

PARTIE II

1. **a)** et **b)** Prouvons, par récurrence sur n, la propriété (H_n) : il existe un polynôme P_n de degré $n+1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$, tel que $\forall x \in I$, $g^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$.

- si $n = 0$ on a $P_0(X) = X$ polynôme de degré 1 à coefficient entier positif.
- si $n = 1$ $g\prime(x) = 1 + \tan(x)^2$ donc $P_1 = 1 + X^2$ polynôme de degré 2 à coefficients entiers positifs.
- Supposons $\forall x \in I$, $g^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$. Alors, $\forall x \in I$, $g^{(n+1)}(x) = (1 + \tan^2 x) P_n'(\tan x)$ et, en posant $P_{n+1}(X) = (1+X^2) P_n'(X)$, on obtient un polynôme de degré $n+2$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ (les coefficients de P_{n+1} s'obtiennent par somme et produit d'entiers positifs) d'où la propriété au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \exists P_n \in \mathbb{N}[\mathbb{X}] \ , \tan^{(n)}(x) = P_n\left(\tan\left(x\right)\right)}$$

2. **a)** On remarque que la fonction étudiée est impaire . On donc pour tout k pair $g^{(k)}(0) = 0$. La série de Taylor de g en 0 est bien du type proposé.

De plus $\forall x \in [0, \pi/2[$, $\tan(x) \geq 0$ donc par somme et produit de nombres positifs $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $g^{(n)}(x) \geq 0$. D'après le **I.3°)c)**, la fonction g est somme de sa série de Taylor sur $[0, \frac{\pi}{2}[$,

Par imparité on étend alors la relation à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$

$$\boxed{\forall x \in] - Pi/2, Pi/2[\ , g(x) = S(x)}$$

b) D'après le **a)** , la série entière S a un rayon de convergence $R \geq \frac{\pi}{2}$.

Si on avait $R > \frac{\pi}{2}$, alors S serait continue sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et en particulier $S(x)$ aurait une limite finie en $\frac{\pi}{2}$, ce qui est impossible vu que $S(x) = \tan x$ sur I. Donc

$$\boxed{R = \frac{\pi}{2}}$$

PARTIE III

Le but de cette partie est clairement (?) de redémontrer que g est développable en série entière au voisinage de 0 .
il ne faut donc pas utiliser II.2.b à la fin du III;
On notera aussi que dans la définition de $\mathcal{S}$, les scalaires M et K dépendent de la suite s

1. On utilise le critère de sous espace vectoriel :

- $\mathcal{S}$ est un sous ensemble de l'espace vectoriel des suites réelles.
- $\mathcal{S}$ contient la suite nulle en prenant $M = 0$ et $K = 0$
- Pour tous s et s' de $\mathcal{S}$, il existe M, K, M', K' strictement positifs tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |s_n| \leq M K^n \, et \, |s_n'| \leq M' K'^n$$

On a donc pour tout entier n : $|\lambda s_n + \lambda' s_n'| \leq |\lambda| \, M K^n + |\lambda'| M' K'^n \leq (|\lambda| \, M + |\lambda'| M')(\max(K, K'))^n$, donc $s" = \lambda \, s + \lambda' s' \in \mathcal{S}$ en prenant $M" = |\lambda| \, M + |\lambda'| M'$ et $K" = \max(K, K')$.
Par conséquent, $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$$

2. On reconnaît dans le produit de Cauchy des deux suites.

a) Avec les notations précédentes, on pose $s" = s \quad s'$ on a (en utilisant une suite géométrique):

- si $K < K'$:

$$\begin{aligned} |s"_n| &= \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| \le \sum_{k=0}^{n} MK^k M' K'^{n-k} = MM'K'^n \sum_{k=0}^{n} (K/K')^k = \frac{MM'\left(1-(K/K')^{n+1}\right)}{1-K/K'} K'^n \\ &\le \frac{MM'}{1-K/K'} K'^n \end{aligned}$$

la suite $s" = s \quad s'$ appartient donc encore à $\mathcal{S}$ en prenant $M" = \frac{M.M'}{1-K/K'}$ et $K" = K'$

- si $K' > K$ le calcul est symétrique et on prend $M" = \frac{M.M'}{1-K'/K}$ et $K" = K$
- si $K' = K$ on a

$$|s"_n| = \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| \le \sum_{k=0}^{n} MK^k M' K'^{n-k} = MM'(n+1)K^n \le MM'(2K)^n$$

et on prend $M" = MM'$ et $K" = 2K$

- *Remarque il est aussi possible de majorer en utilisant le binôme de Newton*

$$|s"_n| = \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| \le \sum_{k=0}^{n} MK^k M' K'^{n-k} \le MM' \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} K^k K'^{n-k} \le MM'(K+K')^n$$

qui répond à la question , mais pour la question suivante la suite géométrique s'impose.

$\boxed{\mathcal{S} \text{ est stable par }}$

b) Prenons la suite e définie par

$$e_0 = 1 \, et \, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ e_n = 0$$

alors e est un élément de $\mathcal{S}$ ($M = 1$ et $K = 1$ conviennent) tel que $\forall s \in \mathcal{S}, \ e \quad s = s \quad e = s.$

3. **a)** $a \quad b = e$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ et $a_0 b_0 = 1$.

Ces conditions définissent un "système linéaire triangulaire infini" qui admet une unique solution dans l'espace des suites réelles:Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists!(b_k)_{k=0}^n$ telle que $a_0 b_0 = 1$ et $\forall m \in]0, n], \ \sum_{k=0}^{m} a_k b_{n-k} = 0$

- $a_0 b_0 = 1$ donc comme $a_0 = 1$ on a une unique valeur de b_0 : $b_0 = 1$
- $a_0 b_0 = 1$ et $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ donne l'unique solution $b_0 = 1$ et $b_1 = -a_1$ (car $a_0 = 1$)
- si $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ont été déterminés de façon unique par les $n+1$ premières équations, on obtient alors b_{n+1} grâce à la $n+2$ ème équation (toujours grâce à $a_0 = 1$)

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k} = 0 \text{ soit } b_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k}$$

- On déduit donc l'existence et l'unicité de b_{n+1}.
- *remarque : attention à rédiger une récurrence forte b_{n+1} dépend de tous les termes précédents.*

b) analyse : on cherche M' et K' tels que

$$|b_0| = 1 \le M' \text{ et } \forall n > 0 \ , \ |b_n| \le M'K'^n$$

la relation de récurrence donne en utilisant la suite géométrique de raison $K/K\prime$ et de premier terme K/K'

$$|b_{n+1}| \le \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| \, |b_{n+1-k}| \le \sum_{k=1}^{n+1} MM'K^k K'^{n+1-k} \le \frac{MM'}{1-K/K'} \left(\frac{K}{K'}\right) K'^{n+1} \le M'K'^{n+1}$$

si $K' > K$ (pour utiliser la suite géométrique) et si $\frac{MK}{K'-K} \le 1$ donc si $K' > K$ et $K' \ge (M+1)K$.

On prend $M' = 1$ et $K' = \max(2K, (M+1)K)$ (par exemple) .

On vérifie par récurrence que ce choix est possible :

- si $n=0$: $|b_0| = 1 \leq M'$
- si $\forall k \leq n$ $|b_k| \leq {K'}^k$ alors :

$$\begin{aligned}|b_{n+1}| &\leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|\,|b_{n+1-k}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} MM'K^k {K'}^{n+1-k} \leq M{K'}^n \sum_{k=1}^{n+1} (\frac{K}{K'})^k \leq M{K'}^{n+1} \times \left(\frac{K}{K'}\frac{1}{1-\frac{K}{K'}}\right) \\ &= MK'_{n+1}\frac{K}{K'-K} \leq {K'}^n \leq M{K'}^{n+1}\frac{K}{MK} = {K'}^{n+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{a \in \mathcal{S} \Rightarrow b \in \mathcal{S}}$$

4. **a)** Si $|s_n| \leq MK^n$ pour tout n, alors $|s_n x^n| \leq M.|Kx|^n \leq M$ si $|x| \leq \frac{1}{K}$. Pour $|x| < 1/K$ on a donc la suite $(s_n x^n)$ bornée et donc :

$$\boxed{R \geq \frac{1}{K}}$$

b) Inversement, si K désigne un réel strictement positif tel que $x = \dfrac{1}{K} < R$, alors la suite $s_n x^n$ est bornée. Soit alors $M = \sup\left(s_n \frac{1}{K^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ .On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s_n| \leq MK^n$

$$\boxed{\text{la série } \sum s_n x^n \text{ a un rayon de convergence strictement positif ssi } s \in \mathcal{S} \text{ et de plus } R \geq \frac{1}{K}}$$

5. **a)** Ecrivons $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]R, R[$; comme $h(0) = 1$, on a $a_0 = 1$.
D'après **4°)b)**, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{S}$ et,en utilisant la question **3)** on peut trouver une suite b telle que $a \quad b = e$
En posant $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, on définit une série entière de rayon de convergence R' non nul d'après le **4°)a)**. La fonction $g.h$ est alors développable en série entière sur $]R'', R''[$, avec $R'' = \min(R, R')$ et, si on pose $(g.h)(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, le coefficient général c_n est donné par le produit de Cauchy $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, ce qui conduit à $g(x)h(x) = 1$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{si } h \text{ est développable en série entière et si } h(0)=1 \text{ alors la fonction } \frac{1}{h} \text{ est développable en série entière au voisinage de z}}$$

Remarque : Le résultat se généralise a une fonction k développable en série entière et elle que $k(0) \neq 0$ en posant $h(x) = \frac{k(x)}{k(0)}$

b) Le résultat du **a)** s'applique à la fonction cosinus (qui vérifie $\cos 0 = 1$ et $R = +\infty$) donc $\dfrac{1}{\cos}$ est développable en série entière au voisinage de 0. Le produit par la fonction sinus développable en série entière sur $\mathbb{R}$ conduit au résultat.