SAMEDI 14 FEVRIER PC

CALCULATRICE INTERDITE

barème indicatif } analyse 12
algebre 08

CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie – **Session 2003**

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II (analyse)

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

On rappelle que la dérivée d'ordre n d'une application f est notée $f^{(n)}(x)$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$.

PARTIE I

1- Rappeler la définition d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0.

2- Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Prouver que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Prouver que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

3- Soit h une application de classe C^∞ sur un intervalle $J =]-a, a[$, $(a>0)$ et vérifiant : $\forall x \in [0,a[, \forall n \in \mathbb{N}, h^{(n)}(x) \geq 0$.

On note $R_N(x) = h(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

a- Ecrire R_N à l'aide d'une intégrale.

b- Pour tout couple (x,y) vérifiant $0<x<y<a$, montrer que

$$0 \leq R_N(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} h(y).$$

c- En déduire que h est la somme de sa série de Taylor sur $[0,a[$.

PARTIE II

Soit g l'application définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan(x)$.

1- a- Prouver pour tout $n \geq 0$, l'existence d'un polynôme P_n, dont on donnera le degré, tel que pour tout x appartenant à I on ait :

$$g^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)).$$

Tournez la page S.V.P.

b- Montrer que les coefficients de P_n sont des entiers positifs ou nuls.

2- On note $a_n = g^{(2n+1)}(0)$. On s'intéresse à la série de Taylor de la fonction g en 0, c'est-à-dire à la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. On note S(x) la somme de cette série lorsqu'elle converge.

a- Prouver que $\forall x \in I$, $S(x) = \tan(x)$.

b- Quel est le rayon de convergence de la série entière S ?

PARTIE III

Soit S l'ensemble des suites $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant :
$\exists (M,K) \in (]0,+\infty[)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s_n| \leq M K^n$.

1- Montrer que S a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2- On considère la loi $\otimes$ définie par $a \otimes b = c$ avec pour tout n, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

a- Montrer que S est stable pour la loi $\otimes$.

b- Déterminer un élément neutre pour la loi $\otimes$, sur S, noté e.

3- a- Soit a un élément de S tel que $a_0 = 1$. Montrer qu'il existe une unique suite b telle que $a \otimes b = e$.

b- Soit $(M,K) \in (]0,+\infty[)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M K^n$.
Trouver un couple (M',K') tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq M' K'^n$. En déduire que b est dans S.

4- a- Soit s un élément de S . Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$?

b- Inversement soit $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R>0 . La suite $s = (s_n)_{n\geq 0}$ est-elle dans S ?

5- a- Soit h une fonction développable en série entière sur]-R,R[vérifiant h(0)=1.
Montrer que $\frac{1}{h}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

b- En déduire que la fonction tangente est développable en série entière au voisinage de 0.

E3A MP 2003

Exercice 1

1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension finie $n > 0$. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

   (i) En discutant sur la dimension de $\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}u$, montrer que $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u$ ou $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$.

   (ii) Soit e un vecteur non nul de $\mathrm{Im}u$. Justifier l'existence d'une base de E dont le premier vecteur est e. Dans le cas où $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$, quelle est la forme de la matrice de u sur une telle base?

   (ii) Dans le cas où $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$, montrer que $Tr(u) = 0$.

   (iii) Montrer alors l'équivalences des trois assertions :

   (a) u est diagonalisable.

   (b) $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u$.

   (c) $Tr(u) \neq 0$.

On nc e $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note F_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ F_A(X) = Tr(AX),$$

   où $Tr(AX)$ désigne la trace de la matrice AX.

   (i) Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (ii) On considère l'application F définie par :

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* \\ & A & \mapsto & F_A \end{array}$$

   Montrer que F est linéaire.

   (iii) Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on rappelle que la matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, excepté le (i, j)-ième qui est égal à 1). Pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$, exprimer $F_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de A. En déduire que F est injective.

   (iv) Montrer que F est un isomorphisme.

3. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_f définie par :

$$\begin{array}{rccc} \psi_f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & X & \mapsto & f(X)J \end{array}$$

   On remarquera que ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (i) Justifier l'existence d'une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(X) = Tr(AX).$$

   (ii) Comparer le noyau de ψ_f et le noyau de f. Quel est l'image de ψ_f? Quel est le rang de ψ_f?

   (iii) Exprimer la trace de ψ_f en fonction de A et J.

   (iv) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que ψ_f soit diagonalisable.