E3A PC 2009 Math A

questions de cours

1. Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

   Analyse : Si $C = S + A$, $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ alors ${}^tC = {}^tS + {}^tA = S - A$ d'où $S = \frac{1}{2}(C + {}^tC)$ et $A = \frac{1}{2}(C - {}^tC)$.

   L'analyse assure l'unicité (sous réserve d'existence) .

   Vérification: :Posons $S = \frac{1}{2}(C + {}^tC)$ et $A = \frac{1}{2}(C - {}^tC)$. On vérifie que

   - $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, car ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tC + C) = S$
   - $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
   - $C = S + A$.

$$\boxed{\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ se décompose } C = S + A \text{ avec } S = \frac{1}{2}(C + {}^tC) \text{ et } A = \frac{1}{2}(C - {}^tC)}$$

2. S est symétrique réelle elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

   Comme $rg(S) \leqslant 2$, la dimension du noyau est ≥ 1 et donc 0 est valeur propre. On peut mette cette valeur propre en premier . S est donc semblable à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. Et il existe une base orthonormée telle que $Mat_{b0}(\phi_S) = D$. Si la base b_0 est indirecte on remplace le dernier vecteur par son opposé et la base obtenue reste orthonormée et est directe. Le nouveau vecteur de base reste dans le noyau et donc la matrice de ϕ_S reste D.

$$\boxed{\text{dans une B.O.N.D. bien choisie } Mat(\phi_S) \text{ est du type } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}$$

   Application: S est bien symétrique de rang $2 \leq 2$.

   $P_S(\lambda) = \det_B(S - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 2\lambda$ donc (à l'ordre près) $\beta = \sqrt{2}$ et $\gamma = -\sqrt{2}$.

   Un vecteur $\overrightarrow{v_1}$ du noyau vérifie : $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ On a donc $\overrightarrow{v_1} = (x, 0, -x)$. le vecteur doit être de norme 1 donc $x = \pm\sqrt{2}/2$.On peut prendre $\overrightarrow{v_1} = \left(\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2\right)$

   Un vecteur $\overrightarrow{v_2}$ du noyau de $\phi_s - \sqrt{2}Id$ vérifie : $\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$ On a donc $\overrightarrow{v_2} = \left(x, \sqrt{2}x, x\right)$. le vecteur doit être de norme 1 donc $x = \pm 1/2$. On peut prendre $\overrightarrow{v_2} = \left(1/2, \sqrt{2}/2, 1/2\right)$

   Un vecteur $\overrightarrow{v_3}$ du noyau de $\phi_s + \sqrt{2}Id$ sera de même du type $\left(x, -\sqrt{2}x, x\right)$. le vecteur doit être de norme 1 donc $x = \pm 1/2$ et la base doit e^tre directe (det > 0) . On doit prendre $\overrightarrow{v_3} = \left(1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2\right)$

   On obtient une matrice de passage solution : $\boxed{P =. \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$

   Si vous n'avez pas oublié que pour une matrice de changement de base orthonormée ${}^tP.P = I_3$ donc $P^{-1} = {}^tP$ le calcul de P^{-1} est évident. Sinon le système

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y + z = 2X \\ \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 2Y \\ -\sqrt{2}x + y + z = 2Z \end{cases}$$

   ne pose pas de problème (ajouter et retrancher L_1 et L_3) . $P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

On a $D^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et $D^{2n+1} = \sqrt{2}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & -2^n \end{pmatrix}$. le calcul de $PD^{2n}P^{-1}$ et de $PD^{2n+1}P^{-1}$ donne :$S^{2n} == 2^{n-1}S^2$, $S^{2m+1} = 2^m S$

$$\boxed{\begin{array}{l} S^{2n} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1}S^2 \\ S^{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix} = 2^m S \end{array}}$$

remarque : le calcul des premiers termes donne $S^3 = 2S$ et permet aussi de faire une récurrence.

Partie 1

1.

1. **a)** L'application nulle de $E \times E$ dans E est bien bilinéaire, antisymétrique et vérifie la dernière condition d'un crochet de Lie: $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

   b) Dans tous les cas :

   - $(A, B) \mapsto [A, B] = AB - BA$ est une application bilinéaire.
   - antisymétrique: $[B, A] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B]$.
   - et :

   $$\begin{aligned} [A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] &= \left\{A(BC-CB)-(BC-CB)A\right\}+\left\{B(CA-AC)-(CA-AC)B\right\} \\ &\quad +\left\{C(AB-BA)-(AB-BA)C\right\} \\ &= ABC-ACB-BCA+CBA+BCA-BAC-CAB+ACB \\ &\quad +CAB-CBA-ABC+BAC \\ &= 0 \end{aligned}$$

   - Le problème c'est donc : $E \times E \to E$
     - dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pas de problème
     - dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ c'est bon :

     $$\begin{aligned} {}^t[A,B] &= {}^t(AB-BA) = {}^tB{}^tA - {}^tA{}^tB = BA - AB \text{ (antisymétrique de } A \text{ et } B) \\ &= -[A,B] \end{aligned}$$

     - dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

     $$\begin{aligned} {}^t[A,B] &= {}^t(AB-BA) = {}^tB{}^tA - {}^tA{}^tB = BA - AB \text{ (symétrie de } A \text{ et } B) \\ &= -[A,B] \end{aligned}$$

     Si on trouve deux matrices symétriques telles que $AB \neq BA$ on a $[A, B] \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et ce n'est pas un crochet de Lie.
     Par exemple pour $n = 2$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on obtient $A_2B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B_2A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .Po n quelconque ≥ 2 on prend par blocs $A = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. Pour $n = 1$ $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$=$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la condition est remplie.

     $$\boxed{(A, B) \to AB - BA \text{ est un crochet de Lie dans , } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\mathcal{S}_1(\mathbb{R})}$$

1. **a)** L'application $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est bilinéaire antisymétrique de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$
   Pour la condition supplémentaire on utilise la formule du double produit vectoriel rappelée dans le sujet

   $$\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})+\overrightarrow{v}\wedge(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u})+\overrightarrow{w}\wedge(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}) = \left\{(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}\right\}+\left\{(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}\right\}+\left\{(\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{v}\right.$$

   $$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \text{ est un crochet de Lie sur } \mathbb{R}^3}$$

   b)

1. $\Psi_{\vec{a}}$ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\ker(\Psi_{\vec{a}}) = \text{Vect}(\overrightarrow{a})$ est de dimension 1 (car $\overrightarrow{a} \neq 0$) donc $rg(\Psi_{\vec{a}}) = 3 - 1 = 2$.
3. On calcule $\Psi_{\vec{a}}(\overrightarrow{i}) = \alpha \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} + \gamma \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = -\beta \overrightarrow{k} + \gamma \overrightarrow{j}$, $\Psi_{\vec{a}}(\overrightarrow{j})$ et $\Psi_{\vec{a}}(\overrightarrow{k})$ ce qui donne :

$$A_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

qui est antisymétrique.
4. $\det_B(A_{\vec{a}} - \lambda I_3) = -\lambda^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\lambda$.
5. Comme $\overrightarrow{a} \neq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \|a\|^2 > 0$ et donc $A_{\vec{a}}$ a une seule valeur propre réelle qui est simple. Elle n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.
(*mais elle est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$)
6. On peut remarquer que le calcul de $A_{\vec{a}}$ reste vrai si $\overrightarrow{a}$ est le vecteur nul .
Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est antisymétrique alors $a = e = i = 0$, $d = -b, g = -c, h = -f$ donc $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$.
L'unique vecteur $\overrightarrow{a}$ est donc défini par $\boxed{\overrightarrow{a} = (-f, c, -b)}$.

Partie 2

2. **a)**

1. • si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{0}$ par linéarité
   • si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, l'antisymétrie donne $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}]$ donc $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}] = \overrightarrow{0}$
   • Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, si famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée on a : $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$ donc $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}] = \overrightarrow{0}$

b) La réciproque est fausse :prendre l'exemple **I.1a** ou (si on veut une application non nulle) **I.1b** : si $A = I_n$ et $B \neq \lambda I_n$, $[A, B] = 0$.

c) Comme E est de dimension 1, tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille liée donc $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Le seul crochet de Lie est donc l'application nulle}}$$

.

3. 1. **a)** Par bilinéarité

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] &= x_1y_1[\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{u}_0] + x_1y_2[\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0] + x_2y_1[\overrightarrow{v}_0, \overrightarrow{u}_0] + x_2y_2[\overrightarrow{v}_0, \overrightarrow{v}_0] \\ &= x_1y_1\overrightarrow{0} + x_1y_2[\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0] - x_2y_1[\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0] + x_2y_2\overrightarrow{0} \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)[\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0] = \det_B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\overrightarrow{k}_0.\end{aligned}$$

en simplifiant avec le résultat de **II.1** et l'antisymétrie.

b)

1. • Si $rg(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \leqslant 1$ l'égalité est évidente car les trois déterminants sont nuls.
   • Si $rg(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 2$ on a si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ libre, c'est donc une base de E et $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned}\det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{w} + \det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} + \det_B(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} &= \det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{w} + \alpha\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} + \beta\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} \\ &= \det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})(\overrightarrow{w} - \alpha\overrightarrow{u} - \beta\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

   si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est lié, on change l'ordre des vecteurs pour se ramener au cas précédent, et par antisymétrie le résultat reste vrai.
2. $[\overrightarrow{u}, [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]] = [\overrightarrow{u}, \det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{k}] = \det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}] = [\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}]$ par bilinéarité.
3. L'application définie par $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] = \det_B(x, y)\overrightarrow{k}$ est une application bilinéaire antisymétrique de $E \times E$ dans E puisque le déterminant est bilinéaire antisymétrique à valeurs dans $\mathbb{R}$
De plus on a d'après les calculs du début de la question :

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{u}, [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]] + [\overrightarrow{v}, [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]] + [\overrightarrow{w}, [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]] &= [\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}] + [\det_B(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}] + [\det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}, \overrightarrow{k}] \\ &= [\det_B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} + \det_B(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} + \det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}, \overrightarrow{k}] = [0, \overrightarrow{k}] = 0\end{aligned}$$

. On a donc bien un crochet de Lie.

c)

$\boxed{\text{Les crochets de Lie sur } E \text{ sont donc les applications définies par } [\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}] = \det{}_B(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\overrightarrow{k} \text{ où } \overrightarrow{k} \text{ est un vecteur fixé}}$

.

Partie 3

1.

1. **a)**

1. On développe par bilinéarité :

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}] &= [x_1\overrightarrow{i}+x_2\overrightarrow{j}+x_3\overrightarrow{k}, y_1\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}+y_3\overrightarrow{k}] \\
&= \left\{x_1y_1[\overrightarrow{i},\overrightarrow{i}]+x_1y_2[\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}]+x_1y_3[\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}]\right\}+\left\{x_2y_1[\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}]+x_2y_2[\overrightarrow{j},\overrightarrow{j}]+x_2y_3[\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}]\right\}+\left\{x_3y_1[\overrightarrow{k},\overrightarrow{i}]+\right. \\
&= (x_1y_2-x_2y_1)[\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}]+(x_1y_3-x_3y_1)[\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}]+(x_2y_3-x_3y_2)[\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}] \text{ d'après } \mathbf{II.1} \text{ et l'antisymétrie} \\
&= (x_2y_3-x_3y_2)\vec{c_1}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{c_2}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{c_3} \text{ avec les notations du sujet}
\end{aligned}$$

2. Par définition de la matrice C on a $\vec{c_1}=\varphi_C(\overrightarrow{i})$, $\vec{c_2}=\varphi_C(\overrightarrow{j})$, $\vec{c_3}=\varphi_C(\overrightarrow{k})$ et la linéarité de φ_C on obtient

$$[\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}]=\varphi_C((x_2y_3-x_3y_2)\overrightarrow{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\overrightarrow{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\overrightarrow{k})=\varphi_C(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y})$$

3. $f=\varphi_C$ est un endomorphisme qui convient. Il est unique car il doit vérifier $f(\overrightarrow{i})=f(\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k})=[\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}]=\vec{c_1}$ et de même $f(\overrightarrow{j})=\vec{c_2}$ et $f(\overrightarrow{k})=\vec{c_3}$.
L'image d'une base est unique, donc aussui l'endomorphisme.

b)

1. 1. On a d'après la décomposition du préliminaire $A_C=\dfrac{C-{}^tC}{2}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & c_{1,2}-c_{2,1} & c_{1,3}-c_{3,1} \\ c_{2,1}-c_{1,2} & 0 & c_{2,3}-c_{3,2} \\ c_{3,1}-c_{1,3} & c_{3,2}-c_{2,3} & 0 \end{pmatrix}$.

Et donc d'après le calcul de **I.2.b.4**

$$\boxed{a=\frac{1}{2}(c_{3,2}-c_{2,3},c_{1,3}-c_{3,1},c_{2,1}-c_{1,2})}$$

2. un calcul direct donne : $\overrightarrow{i}\wedge\vec{c_1}=c_{2,1}\overrightarrow{k}-c_{3,1}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j}\wedge\vec{c_2}=c_{3,2}\overrightarrow{i}-c_{1,2}\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{k}\wedge\vec{c_3}=c_{1,3}\overrightarrow{j}-c_{2,3}\overrightarrow{i}$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{i}\wedge\vec{c_1}+\overrightarrow{j}\wedge\vec{c_2}+\overrightarrow{k}\wedge\vec{c_3}=2\vec{a}}$$

3. par définition des vecteurs :

$$[\overrightarrow{i},\vec{c_1}]+[\overrightarrow{j},\vec{c_2}]+[\overrightarrow{k},\vec{c_3}]=[\overrightarrow{i},[\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}]]+[\overrightarrow{j},[\overrightarrow{k},\overrightarrow{i}]]+[\overrightarrow{k},[\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}]]=\overrightarrow{0}$$

car [,] est un crochet de Lie.

4. Par linéarité

$$\begin{aligned}
\varphi_C(2\overrightarrow{a}) &= \varphi_C(\overrightarrow{i}\wedge\vec{c_1})+\varphi_C(\overrightarrow{j}\wedge\vec{c_2})+\varphi_C(\overrightarrow{k}\wedge\vec{c_3}) \\
&= [\overrightarrow{i},\vec{c_1}]+[\overrightarrow{j},\vec{c_2}]+[\overrightarrow{k},\vec{c}3] \text{ d'après } \mathbf{III.1.A.2} \\
&= \overrightarrow{0} \text{ d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

. On a donc $\varphi_{S_C}(\overrightarrow{a})=\varphi_C(\overrightarrow{a})-\varphi_{A_C}(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}-\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$ d'où $\overrightarrow{a}\in\ker(\varphi_{S_C})$.

c)

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}] &= \varphi_C(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}) \text{ d'après } \mathbf{III.1.a.2} \\
&= \varphi_{S_C}(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y})+\varphi_{A_C}(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}) \text{ d'après la décomposition de } C \\
&= \varphi_{S_C}(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y})+\vec{a}\wedge(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}) \text{ par caractérisation de } \varphi_{A_C} \\
&= \varphi_{S_C}(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y})+(\vec{a}.\overrightarrow{y})\overrightarrow{x}-(\vec{a}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{y} \text{ (double produit vectoriel)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{[\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}]=\varphi_{S_C}(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y})+(\vec{a}.\overrightarrow{y})\overrightarrow{x}-(\vec{a}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{y}}$$

2.

1. **a)**
   - $\forall y \in E\,:\, x \to \varphi_{S_C}(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}) + (\vec{a}.\overrightarrow{y})\overrightarrow{x} - (\vec{a}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{y}$ est bien linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires.
   - $\forall\,(x,y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] &= \varphi_{S_C}(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}) + (\vec{a}.\overrightarrow{y})\overrightarrow{x} - (\vec{a}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{y} = \varphi_{S_C}(-\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{x}) + (\vec{a}.\overrightarrow{y})\overrightarrow{x} - (\vec{a}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{y} \\ &= -\left(\varphi_{S_C}(\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{x}) + (\vec{a}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{y} - (\vec{a}.\overrightarrow{y})\overrightarrow{x}\right) = -\,[\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}]\end{aligned}$$

   b)

   1. Le premier vecteur est un vecteur unitaire du noyau de φ_{S_C}, on peut donc le choisir égal à $\dfrac{1}{\rho}\vec{a}$. On peut alors complété en une base orthonormée directe de vecteur propre.
   2. $\mathcal{M}_b(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{M}_b(\varphi_{S_C}(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})) = \mathcal{M}_b(\varphi_S).\mathcal{M}_b((\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(u_3v_1 - u_1v_3) \\ \gamma\,(u_1v_2 - u_2v_1) \end{pmatrix}$.

      $\mathcal{M}_b((\vec{a}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} - (\vec{a}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{v}) = \rho v_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \rho u_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ u_2v_1 - u_1v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \end{pmatrix}$

      donc

$$\mathcal{M}_b([\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]) = \mathcal{M}_b(\varphi_S(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + (\vec{a}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} - (\vec{a}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{v}) = (u_3v_1 - u_1v_3)\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} + (u_1v_2 - u_2v_1)\begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \gamma \end{pmatrix}$$

      qui est bien l'égalité demandée.
   3. En appliquant la formule précédente au couple $(\overrightarrow{x}, \vec{d})$ on obtient $[\overrightarrow{x}, \vec{d}] = -x_1\rho\vec{d} + x_1\beta\vec{e}$ et $[\overrightarrow{x}, \vec{e}] = -x_1\gamma\vec{d} - x_1\rho\vec{e}$.
   4. On remarque que $[\overrightarrow{x}, \vec{d}] = -x_1\vec{e'}$ et $[\overrightarrow{x}, \vec{e}] = +x_1\vec{d'}$ et donc :

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{x}, [\overrightarrow{y}, \vec{z}]] &= [\overrightarrow{x}, (y_3z_1 - y_1z_3)\vec{d} + (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{e}] \\ &= -(y_3z_1 - y_1z_3)x_1\vec{e'} + (y_1z_2 - y_2z_1)x_1\vec{d'} \\ &= x_1((y_1z_2 - y_2z_1)\vec{d'} + (y_1z_3 - y_3z_1)\vec{e'})\end{aligned}$$

      .
   5. On a donc en calculant $[\overrightarrow{y}, [\vec{z}, \overrightarrow{x}]]$ et $[\vec{z}, [\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}]]$ par permutation circulaire:

$$\begin{aligned} & [\overrightarrow{x}, [\overrightarrow{y}, \vec{z}]] + [\overrightarrow{y}, [\vec{z}, \overrightarrow{x}]] + [\vec{z}, [\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}]] \\ = \; & (x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1 + y_1z_1x_2 - y_1z_2x_1 + z_1x_1y_2 - z_1x_2y_1)\vec{d'} + (x_1y_1z_3 - x_1y_3z_1 + y_1z_1x_3 - y_1z_3x_1 + z_1x_1y_3 - z_1x_3y \\ = \; & \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

      . Comme [,] est déjà bilinéaire antisymétrique, c'est bien un crochet de Lie.
      Le vecteur $\overrightarrow{a} = (1, 0, -1)$ est bien un vecteur du noyau de φ_S.
      En reprenant les notation du préliminaire on a la B.O.N.D. : $\left(\overrightarrow{v_1} = \dfrac{a}{\|a\|}, \overrightarrow{v_2} = \left(1/2, \sqrt{2}/2, 1/2\right), \overrightarrow{v_3} = \left(1/2, \sqrt{2}/2, 1/2\right)\right)$
      Ce qui donne avec les valeurs propres $\overrightarrow{d} = \sqrt{2}\overrightarrow{v_2} + \sqrt{2}\overrightarrow{v_3} = \sqrt{2}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right)$, $\overrightarrow{e} = -\sqrt{2}\overrightarrow{v_2} - \sqrt{2}\overrightarrow{v_3} = -\overrightarrow{d}$
      Le calcul de $(u_3v_1 - u_1v_3)$et $(u_1v_2 - u_2v_1)$ dans la base b de vecteurs propres reste pénible.
      On peut remarquer que $(u_3v_1 - u_1v_3) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = \det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_2})$ et $(u_1v_2 - u_2v_1) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \det_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_3}$
      Comme le déterminant dans une B.O.N.D. est indépendant de la base de calcul on a

$$\begin{aligned}[u, v] &= (\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_2}) - \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_3}))\,\overrightarrow{d} \\ &= \det(\overrightarrow{u}, \rightarrow v, \sqrt{2}j).\sqrt{2}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right) \\ &= 2\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, j).\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{[u, v] = 2\det(u, v, j).\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right)}$$

      Soit $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 2(U_3V_1 - U_1V_3)(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ si (U_1, U_2, U_3) sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$
      remarque : on peut aussi faire directement le calcul dans la base initiale en utilisant la définition du début du 2

c) Si $\overrightarrow{a} = 0$ on ne sait plus que la matrice S est de rang ≤ 2 .

On se place dans un B.O.N.D (I, J, K) telle que $Mat(\varphi_S) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] = \varphi_S(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y})$

On a alors $\mathcal{M}_b([u, v]) = \begin{pmatrix} \alpha\,(u_2v_3 - u_3v_2) \\ \beta(u_3v_1 - u_1v_3) \\ \gamma\,(u_1v_2 - u_2v_1) \end{pmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,\alpha I + (u_3v_1 - u_1v_3)\beta J + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\gamma K$

ensuite $\mathcal{M}_b([x, I]) = \beta x_3 J - \gamma x_2 K$, $\mathcal{M}_b([x, J]) = -\alpha x_3 I + \gamma x_1 K$, $\mathcal{M}_b([x, K]) = \alpha x_2 I - \beta x_1 J$

d'où $\mathcal{M}_b([x, [y, z]]) = ((y_3z_1 - y_1z_3)\,\beta(-\alpha x_3) + (y_1z_2 - y_2z_1)\gamma(\alpha x_2))I + \cdots$

Par permutation circulaire la coordonnée sur I de $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]]$ sera :

$$\begin{aligned} &(y_3z_1 - y_1z_3)\,\beta(-\alpha x_3) + (y_1z_2 - y_2z_1)\gamma(\alpha x_2) \\ +&(z_3x_1 - z_1x_3)\,\beta(-\alpha y_3) + (z_1x_2 - z_{2x}z_1)\gamma(\alpha y_2) \\ +&(x_3y_1 - x_1y_3)\,\beta(-\alpha z_3) + (x_1y_2 - x_2x_1)\gamma(\alpha z_2) \end{aligned}$$

1. qui est bien nul.

   Par permutation circulaire les coordonnées sur J et K sont aussi nuls.

   Remarque : avec la matrice symétrique de rang 3 , je n'ai pas trouvé de vecteur simple jouant le rôle de c et d