D'APRES MINES-PONTS 2008 - ÉPREUVE COMMUNE PC/PSI

Par rapport au corrigé initiale , j'ai rajouté la question 3 et la question 11 (propriétés élémentaires des coefficients de Fourier) , j'ai modifié un petit peu la seconde partie pour retirer les sous espaces propres et j'ai rajouté les indications à la fin du problème.

I. Préliminaires

1. On reconnaît les polynômes d'interpolation de Lagrange.

   On vérifie la relation : $\forall (i,j) \in [[0,k]]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

   Si $\lambda_0, \cdots, \lambda_k$ sont des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda_i L_i = 0$, on a pour tout j $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda_i L_i(a_j) = 0$, soit $\lambda_j = 0$:La famille est libre.
   Comme elle est de cardinal $k+1 = \dim(C_k[X])$ c'est une base.

   $$\boxed{\text{la famille } (L_i)_{i=0}^{k} \text{ est une base de } E}$$

2. Si P est un polynôme de $C_k[X]$, sa décomposition dans la base $(L_0, \cdots, L_k)$ est $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i L_i$ avec $\alpha_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i L_i(a_j) = P(a_j)$

   Les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i=0}^{k}$ sont les $P(a_i)$.
   Donc la matrice M demandée est $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{k+1}(C)$, avec $m_{i,j} = a_{i-1}^{j-1}$:

   $$M = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^k \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^k \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_k & \cdots & a_k^k \end{pmatrix}.$$

3. Si les (a_i) sont deux à deux distinctes la matrice précédente est une matrice de changement de base : elle est inversible
   Si $a_i = a_j$ avec $i \neq j$ la matrice a deux lignes égales ($L_{i+1} = L_{j+1}$) elle n'est pas inversible.

II. Fonctions polynomiales

4. *Dans le sujet initial cette question figure après le calcul des matrices qui suit. Ce qui laisse deux plan au choix : celui qui utilise , comme ci dessous, les propriétés des polynômes , ou bien celui qui utilise les polynôme carctéristique.*

   - Si P est un polynôme propre de d , $P \neq 0$ et il existe un scalaire tel que $P' = \lambda P$ .En comparant les degrés on a une absurdité si $\lambda \neq 0$, $P^{'}$ et λP étant de degrés différents.La seule solution possible est donc $\lambda = 0$ et $P \in \mathbb{C}_0[X]$. Un polynôme constant non nul vérifie bien $P' = 0P$

     $$\boxed{d \text{ admet une seule valeur propre 0 et on a alors } P \text{ constante non nulle}}$$

   - Si P est un polynôme propre de t_a , $P \neq 0$ et il existe un scalaire tel que $P(X+a) = \lambda P(X)$. En regardant les coefficients dominants on trouve $\lambda = 1$ .P est donc périodique de période $|a|$ (car $a \neq 0$) . L'équation $P(x) - P(0) = 0$ admet donc une infinité de racines (tous les na , $n \in \mathbb{Z}$) et est donc $P(x) - P(0)$ est le polynôme nulle.

     $$\boxed{t_a \text{ admet une seule valeur propre 1 et on a alors } P \text{ constante non nulle}}$$

5. Soit $j \in [[0,k]]$. On a $t_a(X^j) = (X+a)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^{j-i} X^i$ par la formule du binôme de Newton.On a donc :

   $$\boxed{(T_a)_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > j \\ \dbinom{j-1}{i-1} a^{j-i} \text{ si } i \leq j \end{cases}}$$

   Par ailleurs, $d(X^j) = j\, X^{j-1}$ pour tout $j \in [[1,k]]$, donc

   $$\boxed{d_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j-1 \\ i \text{ si } i = j-1 \end{cases}}$$

ce qui donne les matrioces :

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_a=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^k \\ 0 & 1 & 2a & & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \binom{k}{2}a^{k-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.

- Si $F=\{0\}$, F est un sous espace vectoriel stable de E.
- Si $F\neq\{0\}$ alors l'ensemble des degrés des polynômes de F est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ majoré par k . Il admet donc un plus grand élément p et il existe un polyôme P de F de degré $p.F$ étant stable par d , $P'=d(P)$ est élément de F, et plus généralement $P^{(j)}$ est élément de F (par récurrence si $P^{(i)}\in F$ alors $P^{(i+1)}=d\left(P^{(i)}\right)\in F$) .

  Par définition de p on a $F\subset\mathbb{C}_p[X]$, mais la famille des $\left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{p}$ est une famille échelonnée en degré, donc une base de $\mathbb{C}_p[X]$, donc $\mathbb{C}_p[X]=\operatorname{Vect}\left(P^{(i)}\right)$ et comme les $P^{(i)}$ sont dans F on a $\mathbb{C}_p[X]\subset F$. On a la double inclusion , donc l'égalité.
- Réciproquement les $\mathbb{C}_p[X]$ sont stables par d .

$$\boxed{\text{Les sous-espaces vectoriels } C_i[X]\ (0\leq i\leq k)\text{, ainsi que } \{0\}\text{, sont les seuls sous espaces stables par } d}$$

- Il y en a donc $k+2$.

7. Le polynôme $\dfrac{d^i(P)}{i!}$ est de degré $k-i$ pour $i\leq k$, la famille $\mathcal{B}_1$ est échelonnée en degrés c'est donc une base de $E=C_k[X]$

   Pour $j\in[[0,k]]$, on obtient facilement

$$\frac{d^j(P)}{j!}=\sum_{i=0}^{k-j}\frac{(i+1)(i+2)\cdots(i+j)}{j!}\,p_{i+j}\,X^i=\sum_{i=0}^{k-j}\binom{i+j}{j}\,p_{i+j}\,X^i\,.$$

   La matrice $R=P_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}_1\right)=(r_{ij})\in\mathcal{M}_{k+1}(C)$ est donc donnée par

$$\boxed{r_{ij}=\begin{cases} 0 \text{ si } i+j>k+2 \\ \dbinom{i+j-2}{j-1}p_{i+j-2} \text{ si } i+j\leq k+2 \end{cases}}$$

$$R=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ p_1 & 2p_2 & \cdots & kp_k & 0 \\ p_2 & & \dfrac{k(k+1)}{2}p_{k-1} & 0 & 0 \\ \vdots & & / & & \vdots \\ p_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   La matrice R est symétrique car :

   - si $i+j>k+2$ $r_{i,j}=r_{j,i}$
   - si $i+j\leq k+2$, $r_{j,i}=\dbinom{i+j-2}{i-1}p_{i+j-2}=\dbinom{i+j-2}{(i+j-2)-(i-1)}p_{i+j-2}=\dbinom{i+j-2}{j-1}p_{i+j-2}=r_{i,j}$

8. La formule de Taylor pour les polynômes donne, pour $j\in[[0,k]]$,

$$P(X+ja)=\sum_{i=0}^{k}\frac{P^{(i)}(X)}{i!}\,(ja)^i=\sum_{i=0}^{k}j^ia^i\,\frac{d^i(P)}{i!}.$$

   On en déduit la matrice $U=M_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S})=(u_{ij})\in\mathcal{M}_{k+1}(C)$ avec

$$\boxed{u_{ij}=a^{(i-1)}(j-1)^{(i-1)}}$$

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 2a & \cdots & ka \\ 0 & a^2 & 4a^2 & \cdots & k^2a^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a^k & 2^ka^k & \cdots & k^ka^k \end{pmatrix}.$$

La matrice U est inversible *car* U est la transposée de la matrice V étudiée à la question **3** en prenant $a_i = i\,a$ pour $i \in [[0,k]]$; elle est donc inversible puisque V est inversible quand les (a_i) sont deux à deux distincts.

On en déduit que <u>la famille S est une base de l'espace vectoriel E</u>.

9. On a $Q = P_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = P_{\mathcal{B}}\ (\mathcal{B}_1)\, P_{\mathcal{B}_1}\,(\mathcal{S}) = RU$.

$$\boxed{Q = RU}$$

10. Raisonnement analogue à celui de la question **5** :

- les sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}_i[X]$ $(0 \leq i \leq k)$ et $\{0\}$ sont stables par t_a
- Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par t_a distinct de $\{0\}$, il existe un polynôme P de degré maximal p dans F : on a par construction $F \subset \mathbb{C}_p[X]$ donc $\dim(F) \leq p+1$.
  De plus les $p+1$ polynômes $P(X)$, $t_a(P) = P(X+a)$, $\cdots$, $t_a^p(P) = P(X+pa)$ appartiennent à F et forment un sysytème libre de F d'après la question **8**, donc $\dim(F) \geq p+1$. On a donc égalité des dimensions et donc égalité des sous espaces.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces vectoriels } C_i[X]\ (0 \leq i \leq k)\text{, ainsi que } \{0\}\text{, sont les seuls sous espaces stables par } t_a}$$

III. Fonctions continues, 2π-périodiques

11. Evident car l'application $\phi \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \phi$ est une forme linéaire.

$$c_n(e_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{e^{i(n-k)t}}{i(n-k)}\right] = 0 \text{ si } n \neq k \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 1 \text{ si } n = k \end{cases}$$

12.

- Si φ_a n'est pas injective , il existe deux entiers distincts n et m tels que $e^{ina} = e^{ima}$. $(n-m)\,a$ est donc un multiple de 2π . Il existe k entier tel que $(m-n)\,a = 2k\pi$. On a donc $\dfrac{a}{\pi} = \dfrac{2k}{n-m} \in \mathbb{Q}$
- Réciproquement si $\dfrac{a}{\pi} \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{a}{\pi} = \dfrac{p}{q}$. On a donc $2qa = 2p\pi$ donc $e^{2qai} = 1 = e^0$. $\varphi_a(2q) = \varphi_a(0)$ avec $2q \neq 0$ donc ϕ_a n'est pas injective.

$$\boxed{\varphi_a \text{ injective} \iff \frac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}}$$

Plus généralement avec les notations précédentes si $\dfrac{a}{\pi} = \dfrac{p}{q}$ alors pour tout entier relatif n

$$\varphi_a(n+2q) = e^{ina+2ip\pi} = \phi_a(n)$$

$2q$ est une période de φ .

13. On calcule avec le changement de variable C^1 bijectif $y = x+a$:

$$\begin{aligned} c_n\left(t_a(f)\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+a)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(y)\, e^{-in(y-a)}\, dy \\ &= e^{ina}\left(\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy\right) \end{aligned}$$

Mais la fonction $t \to f(t)e^{int}$ est 2π périodique donc l'intégrale est indépendante de la période de calcul.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(y)\, e^{-in(y-a)}\, dy &= \int_0^{a} f(y)\, e^{-in(y-a)}\, dy + \int_a^{a+2\pi} f(y)\, e^{-in(y-a)}\, dy - \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(y)\, e^{-in(y-a)}\, dy \\ &= \int_a^{a+2\pi} f(y)\, e^{-in(y-a)}\, dy\end{aligned}$$

les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{a} f(y)\, e^{-in(y-a)}\, dy$ et $\displaystyle\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(y)\, e^{-in(y-a)}\, dy$ étant égales.

$$\boxed{c_n\left(t_a(f)\right) = e^{ina}\, c_n(f)}$$

14. Soit $f \in E$ une fonction non nulle et λ un scalaire telle que $t_a(f) = \lambda f$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $c_n\left(t_a(f)\right) = c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f)$ (linéarité vue à la question **11**) . Or $c_n\left(t_a(f)\right) = e^{ina}\, c_n(f)$.

    $f \in E$ est non nulle donc d'après le résultat admis, il existe un entier n tel que $c_n(f) \neq 0$. Donc en prenant cette valeur de n on peut simplifier par $c_n(f)$ et donc $\lambda = e^{ina}$

    Réciproquement, si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = e^{ina}$, alors la fonction e_n est vecteur propre de t_a pour la valeur propre λ (vérification évidente : $e_n(x+a) = e^{ina}\, e_n(x)$).

    $$\boxed{\text{Les valeurs propres de } t_a \text{ sont donc exactement les nombres complexes de la forme } e^{ina} \text{ pour } n \text{ décrivant } \mathbb{Z}}$$

15. remarque : le résultat admis est une conséquence de Parseval .si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π périodique on a :

    $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

    On prouve d'abord que h est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients de Fourier sont nuls. :

    - Si h est nulle , on a une somme de réels positifs nulle . donc tous les termes $c_n(h)$ sont nuls.
    - Si tous les coefficients de Fourier $c_{nb}(h)$ sont nuls , on a l'intégrale d'une fonction continue positive qui est nulle . La fonction h est donc nulle sur $[0, 2\pi]$, donc sur $\mathbb{R}$ par période.

    Il suffit alors de prendre $h = f - g$ pour avoir le résultat.

    - Si $\dfrac{a}{\pi} = \dfrac{p}{q}$ est rationnel alors $2q$ est une période de la suite φ_a donc $e^{i(n+2q)a} = e^{ina}$ et donc e_{n+2q} est aussi dans le sous espace propre associé à la valeur propre e^{ina} . Or les deux fonctions e_n et e_{n+2q} forment un système libre . donc le sous espace propre est de dimension ≥ 2
    - Si $\dfrac{a}{\pi}$ est irrationnel alors si f vérifie $t_a(f) = e^{ina} f$ on a pour tout entier m :

      $$e^{ima} c_m(f) = c_m(t_a(f)) = e^{ina} c_m(f)$$

      Or φ est injective donc

      $$m \neq n \Rightarrow e^{ima} \neq e^{ina} \Rightarrow c_m(f) = 0$$

      Les deux fonctions continues f et $c_n(f)e_n$ ont donc les mêmes coefficients de Fourier. Elle sont donc égales.

    $$\boxed{\text{les sous espaces propres sont des droites si et seulement si } \frac{a}{\pi} \text{ est irrationnel}}$$

16. Les $p+1$ fonctions $\left(t_a^i(f)\right)_{i=0}^p$ appartiennent à F de dimension p. le cardinal est strictement supérieur à la dimension, la famille est liée .

    $$\exists\, (\alpha_j)_{j=0}^p \neq (0)\, , \sum_{j=0}^{p} \alpha_j\, t_a^j(f) = 0$$

    Or par récurrence sur j : $c_n\left(t_a^j(f)\right) = e^{inja} c_n(f)$.

    - vrai si $j = 0$ et 1 .
    - Si $c_n\left(t_a^{j-1}(f)\right) = e^{in(j-1)a} c_n(f)$ alors $c_n\left(t_a^j(f)\right) = c_n\left(t_a(t_a^{j-1})\right) = e^{ina} c_n\left(t_a^{j-1}(f)\right) = e^{inja} c_n(f)$.

Par la linéarité vue à la question **11** on a donc

$$c_n\left(\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, t_a^j(f)\right)=\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, c_n\left(t_a^j(f)\right)=\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, e^{inja}c_n(f)$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{Z}\ ,\ \left(\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, e^{inja}\right)\ c_n(f)=0}$$

.

17. Soit $f\in F$. Soient $(\alpha_i)_{i=0}^{p}$ les scalaires non tous nuls de la question **16.**

    On a donc $c_n(f)=0$ ou $\displaystyle\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, e^{inja}=0$.

    Dans le second cas e^{ina} est racine du polynôme $P(X)=\displaystyle\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, X^j$. Ce polynôme admet un nombre fini de racines . On peut donc poser

    $$N_f=\begin{cases}0 \text{ si } P \text{ n'a pas de racine du type } e^{ina}\\ 1+\max\left\{|n|\,,e^{ina} \text{ soit racine de } P\right\}\ \text{sinon.}\end{cases}$$

    On a donc :

    $$|n|\geq N_f\Rightarrow\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, e^{inja}\neq 0\Rightarrow c_n(f)=0.$$

18. F est de dimension finie p .Il existe donc une base $(f_i)_{i=1}^{p}$ de F, Soit $N=\max\{N_{f_1},\cdots,N_{f_p}\}$.

    Pour tout entier relatif n tel que $|n|\geq N$, on a $c_n(f_j)=0$ pour tout $j\in[[1,p]]$ donc, par linéarité si

    $$g=\sum_{j=1}^{p}\beta_j f_j \text{ alors } c_n(g)=\sum_{j=1}^{p}\beta_j c_n\left(f_j\right)=0$$

    $$\boxed{\exists N\in\mathbb{N}\ ,\forall g\in F\ ,\ n\geq N\Rightarrow c_n(g)=0}$$

19. Si $g\in F$, on a $c_n(g)=0$ pour $|n|\geq N$, Soit alors $h=\displaystyle\sum_{k=-N}^{N}c_k(g)e_k$,

    On a $c_n(h)=\displaystyle\sum_{k=-N}^{N}c_k(f)c_n(e_k)=\sum_{k=-N}^{N}c_k(g)\delta_{k,n}=\begin{cases}c_n(g)+\sum 0=c_n(g) \text{ si } |n|<N\\ \sum 0=0=c_n(g) \text{ si } |n|\geq N\end{cases}$. donc $g=h\in G$ d'après le résultat admis. et donc $\boxed{F\subset G}$

    Enfin, G est stable par t_a car pour les fonctions e_k de la famille génératrice $t_a\left(e_k\right)=e^{ika}e_k\in G$ car

    $$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ t_a(e_k)(x)=e^{ik(x+a)}=e^{ika}e^{ikx}=e^{ika}e_k(x)$$

20. Soit τ l'endomorphisme de G induit par t_a. Il est diagonalisable puisque G admet une base $(e_k)_{-N\leq k\leq N}$ constituée de vecteurs propres de τ.

21. Soit τ' l'endomorphisme de F induit par t_a (et donc aussi par τ). Comme c'est l'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable de G sur un sous-espace stable, il est lui aussi diagonalisable. On peut donc trouver une base de F constituée de vecteurs propres de τ' (et donc de τ, ou de t_a). Mais, comme τ est diagonalisable avec des valeurs propres toutes distinctes (les e^{ika}, $-N\leq k\leq N$), les vecteurs propres de τ sont tous colinéaires à des vecteurs e_k avec $k\in[[-N,N]]$. Une telle base de F est donc de la forme $(e_k)_{k\in S}$, avec $S\subset[[-N,N]]$.