L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

La partie III est indépendante des deux premières.

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E . Un vecteur propre de f est un élément v non nul de E tel que $\{v, f(v)\}$ soit lié. La valeur propre associée est alors l'unique scalaire λ tel que $f(v) = \lambda v$

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. on définit par récurrence :

$$f^0 = Id, f^1 = f, \forall k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$$

I Préliminaires

Le sujet demande plusieurs fois de donner une matrice de $\mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{C})$. Vous répondrez à chaque fois d'une part en "dessinant" l'allure de la matrice , d'autre part en donnant explicitement la valeur de son coefficient (i, j) pour $1 \leq i \leq k+1$ et $1 \leq j \leq k+1$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $(a_i)\ _{i=0}^{k}$ un ensemble de $k+1$ complexes 2 à 2 distincts et pour i entier compris entre 0 et k, on définit le polynôme L_i par .

$$L_i(X) = \prod_{0 \leq j \leq k, j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

1. Montrer que les polynômes $(L_i)_{i=0}^{k}$ forment une base de $\mathbb{C}_k[X]$.

2. Écrire la matrice M de la famille $\left(X^i\right)_{i=0}^{k}$ dans la base $(L_i)_{i=0}^{k}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $(a_i)\ _{i=0}^{k}$ un ensemble de $n+1$ complexes distincts ou non

   Soit V la matrice définie par :

$$V = (v_{i,j}) \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{C}) \ \ , \forall\, (i, j) \in [[1, k+1]]^2 \ \ , v_{i,j} = a_{i-1}^{j-1}$$

   Montrer que V est inversible si et seulement si les $(a_i)_{i=1}^{k+1}$ sont deux à deux distincts.

II Fonctions polynômiales

Dans cette partie, on note k un entier naturel fixé et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k.

Pour $a \in \mathbb{C}^*$, on définit t_a par

$$\begin{array}{lll} E & \rightarrow & E \\ P & \rightarrow & Q = t_a(P) \text{ tel que } Q(X) = P(X+a) \end{array}$$

Pour $P \in E$ on note d la dérivation :

$$\begin{array}{lll} E & \rightarrow & E \\ P & \rightarrow & P' \end{array}$$

On tiendra pour acquis que t_a et d sont des endomorphismes de E.

4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres t_a et d .

   On désignera par $\mathcal{B} = (e_i)_{i=0}^{k}$ la base canonique de E définie par $\left(X^i\right)_{i=0}^{k}$.

5. Écrire les matrices, notées respectivement T_a et D, des endomorphismes $t_a$et d dans la base B.

6. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E stables par d ? Donner leur nombre.

   Indication:on pourra considérer un polynôme de degré maximal dans F, sous-espace stable.Ne pas oublier de justifier l'existence.

7. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{k} p_i X^i$ un polynôme fixé de degré k . Montrer que le système $\left(\dfrac{d^i(P)}{i!}\right)$ constitue une base $\mathcal{B}_1$ de E.

   Donner la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_1$.Montrer que R est symétrique.

8. Pour $a \in \mathbb{C}^*$, exprimer les coordonnées du système $\mathcal{S} = (P(X + ja))_{j=0}^{k}$ dans la base $\mathcal{B}_1$. On note U la matrice ainsi obtenue.

   Montrer que $\mathcal{S}$ constitue une base de E.

9. On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{S}$. Exprimer Q en fonction de R et U.

10. Pour a fixé dans $\mathbb{C}^*$, caractériser les sous-espaces vectoriels de E stables par t_a .

III Fonctions continues , 2-périodiques

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques..

Pour $f \in E$, on désignera par $c_n(f)$ la suite (indexée sur $\mathbb{Z}$) :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ , \ c_n\left(f\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

On admet le résultat : Soient f et g sont deux fonctions de E . $f = g \Leftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{Z}\ ,\ c_n(f) = c_n(g)$

Pour tout entier relatif k, on notera e_k la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \rightarrow & exp(ikx) \end{array}$$

.

Pour $a \in \mathbb{R}$, et $f \in E$, on note $t_a(f)$ la fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \rightarrow & f(x+a) \end{array}$$

Cela nous permet de définir l'endomorphisme t_a de E :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \mapsto & t_a(f) \end{array}$$

Pour tout réel a, on définit la fonction φ_a par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \rightarrow & \exp(ina) \end{array}$$

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & c_n(f) \end{array}$$

est une forme linéaire.

Pour tout $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$, calculer $c_k(e_n)$

12. Montrer que la fonction φ_a est injective si et seulement si $\dfrac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$

Dans le cas contraire, montrer que $\varphi_a$est périodique.

13. Pour $f \in E$,donner les valeurs de la suite $(c_n(t_a(f))$ en fonction des valeurs prises par la suite $(c_n(f))$.

14. Donner les valeurs propres de t_a .

15. (question 5/2) Caractériser les valeurs de a pour lesquelles les espaces propres de t_a sont tous de dimension 1.

On considère dans toute la suite F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geq 1$ et stable par t_a.

16. Soit $f \in F$. f non nul, montrer qu'il existe $p+1$ scalaires α_j non tous nuls tels que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ , \ \left(\sum_{j=0}^{p} \alpha_j \exp(inaj) \right) c_n(f) = 0$$

indication :Montrer que la famille $\left(t_a^j(f)\right)_{j=0}^p$ est lié.

On suppose dans toute la suite que a est un réel fixé tel que a/π soit irrationnel.

17. Soit f appartenant à F , montrer qu'il existe un entier N_f tel que $c_n(f) = 0$ pour $|n| \geq N_f$

indication : introduire le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \alpha_j X^j$.

18. Montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout g appartenant à F , $c_n(g) = 0$ pour $|n| \geq N$.

indication : introduire une base de F .

19. Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par $(ek)_{k=-N}^{N}$. Vérifier que $F \subset G$ et que G est stable par t_a.

indication : si $f \in F$ introduire $h = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k$

Les deux dernières questions sont réservées au 5/2.

20. L'endomorphisme t_a restreint à G est-il diagonalisable?

21. Montrer qu'on peut trouver un ensemble fini S d'entiers relatifs tel que F soit le sous-espace vectoriel engendré par les e_k pour k décrivant S