Dans tout le problème, on désigne par $\mathbb{K}$ un corps (qu'on pourra supposer égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$) et par p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On convient de plus que :

◊ Les vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$ sont des p-uplets x d'éléments de $\mathbb{K}$ qu'on identifie ici à la matrice-colonne de leurs composantes dans la base canonique $(e_1, \dots, e_p)$ définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , e_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On notera ${}^t e_1, \dots, {}^t e_p$ les p matrices-lignes transposées des matrices-colonnes précédentes.

◊ L'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ des matrices carrées à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ est rapporté à sa base canonique $(E_{i\,j} \,/\, 1 \leq i, j \leq p)$, $E_{i\,j}$ désignant la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont les éléments sont nuls à l'exception de celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1. Dans ce contexte, une matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ s'écrit donc :

$$M = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} m_{i\,j}\, E_{i\,j} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1\,p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2\,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p\,1} & m_{p\,2} & \cdots & m_{p\,p} \end{pmatrix}.$$

Un résultat préliminaire

a) On considère quatre entiers i, h, k, j compris entre 1 et p.
Vérifier que $E_{i\,k}\, E_{k\,j} = E_{i\,j}$ et que $E_{i\,h}\, E_{k\,j} = 0$ si $h \neq k$.

b) Etant donnés une matrice $A = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{i\,j}\, E_{i\,j}$ et des entiers x et y compris entre 1 et p, expliciter les produits $E_{x\,y}\, A$ et $A\, E_{x\,y}$.

c) *Application :* on désigne par $C_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad A\,M = M\,A.$$

Déduire des résultats précédents l'égalité $C_p(\mathbb{K}) = \{\lambda\, I_p \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

■ Partie I

On considère dans cette partie une matrice A de l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et on étudie l'application d_A associant à toute matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ la matrice $d_A(M)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$d_A(M) = A\,M - M\,A.$$

1°) *Propriétés générales de d_A*
a) Montrer que d_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
b) L'endomorphisme d_A est-il injectif? surjectif? Dans quel cas est-il nul?
c) Montrer que l'endomorphisme d_A vérifie la propriété suivante :

$$\forall\, M,\, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad d_A(M\,N) = d_A(M)\,N + M\,d_A(N).$$

2°) *Etude de d_A lorsque A est diagonalisable*
On suppose dans cette question la matrice A diagonalisable.
a) Montrer que la matrice ${}^tA$ transposée de A est aussi diagonalisable.
b) Montrer que A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres.

On désigne alors par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes ou non de A et ${}^tA$ et par :
- $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$ une base de vecteurs propres de A associée à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
- $\mathcal{W} = (W_1, \ldots, W_p)$ une base de vecteurs propres de ${}^tA$ associée à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

c) Calculer $d_A(V_i\,{}^tW_j)$ en fonction de $V_i\,{}^tW_j$ pour $1 \le i,\ j \le p$.

On note P et Q les matrices de passage de la base $(e_1, \ldots, e_p)$ à ces bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$,
et on considère l'application φ définie de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans lui-même par $\varphi(M) = P\,M\,{}^tQ$.

d) Préciser les produits $P\,e_i$ et $Q\,e_j$ pour $1 \le i,\ j \le p$.
Comparer les matrices $E_{i\,j}$ et $e_i\,{}^te_j$, et en déduire $\varphi(E_{i\,j})$.
e) Montrer que l'application φ réalise un automorphime de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
En déduire que la famille $(V_i\,{}^tW_j\ /\ 1 \le i,\ j \le p)$ est une base de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
f) En déduire que d_A est diagonalisable, et préciser ses valeurs et vecteurs propres.

■ Partie II

On appelle *dérivation* dans une algèbre $\mathcal{A}$ tout endomorphisme d de $\mathcal{A}$ vérifiant de plus :

$$\forall\, M,\, N \in \mathcal{A}, \quad d(M\,N) = d(M)\,N + M\,d(N).$$

La dérivation usuelle des polynômes est donc une dérivation au sens précédent dans $\mathbb{K}[X]$.
L'application d_A de la partie I est une dérivation de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ puisqu'on a établi en I.1° que :

$$\forall\, M,\, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad d_A(M\,N) = d_A(M)\,N + M\,d_A(N).$$

On se propose de déterminer dans cette partie II toutes les dérivations d de l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1°) *Trace d'une matrice carrée*
On rappelle que la trace d'une matrice carrée $M = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} m_{i\,j}\,E_{i\,j}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la somme de ses éléments diagonaux, définie par $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{p} m_{i\,i}$.
a) Etablir que l'application $M \longrightarrow \mathrm{Tr}(M)$ est linéaire de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
b) Etablir, si *A, B* sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'égalité $\mathrm{Tr}(A\,B) = \mathrm{Tr}(B\,A)$.
c) En déduire, si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'égalité $\mathrm{Tr}(P^{-1}\,A\,P) = \mathrm{Tr}(A)$.
Ainsi, deux matrices semblables ont la même trace.

2°) *Trace d'une matrice de projection*
Soit une matrice de projection M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, autrement dit une matrice M telle que $M^2 = M$.
On identifie M à l'endomorphisme canoniquement associé $x \in \mathbb{K}^p \longrightarrow M\,x \in \mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^p$.
a) Montrer que les seules valeurs propres possibles de M sont 0 et 1.
b) En exploitant l'égalité $x = M\,x + (x - M\,x)$ valable pour tout vecteur x de $\mathbb{K}^p$, établir que :

$$\mathbb{K}^p = \mathrm{Ker}(M - I_p) \oplus \mathrm{Ker}(M).$$

c) En déduire que M est diagonalisable et qu'il existe une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1}\,M\,P = D$$

où D est diagonale avec r éléments diagonaux égaux à 1, les autres égaux à 0 ($0 \leq r \leq p$).
d) Vérifier que cet entier r est la valeur commune de la trace et du rang de D, et donc de M.
Ainsi, pour une matrice de projection M, le rang de M est égal à la trace de M.

Dans la suite du problème, on désigne désormais par d une dérivation de l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et on lui associe l'application suivante F, définie de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{2\,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad F(M) = \left(\begin{array}{c|c} M & d(M) \\ \hline O_p & M \end{array}\right).$$

($F(M)$ est définie à l'aide des 4 blocs d'ordre p ci-dessus où O_p est la matrice nulle d'ordre p).

3°) *Propriétés de l'image par F de la base canonique de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$
a) Déterminer $d(I_p)$, où I_p désigne la matrice-identité d'ordre p.
b) Etablir que F est un morphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans l'algèbre $\mathcal{M}_{2\,p}(\mathbb{K})$, c'est à dire qu'on a pour tout élément λ de $\mathbb{K}$ et tout couple (M, N) de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:

$$F(M+N) = F(M) + F(N),\ \ F(\lambda\,M) = \lambda\,F(M),\ \ F(M\,N) = F(M)\,F(N),\ \ F(I_p) = I_{2\,p}.$$

On rappelle que les matrices $E_{i\,j}$, où $1 \leq i,\ j \leq p$, ont été définies au début de ce problème, et qu'on a établi les relations suivantes : $E_{i\,k}\,E_{k\,j} = E_{i\,j}$ et que $E_{i\,h}\,E_{k\,j} = 0$ si $h \neq k$.
On rappelle également l'inégalité $\mathrm{rg}(A\,B) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$ pour $A,\ B \in \mathcal{M}_{2\,p}(\mathbb{K})$.

c) Etablir, pour $1 \leq i,\ j \leq p$, la relation $F(E_{i\,i}) = F(E_{i\,j})\,F(E_{j\,j})\,F(E_{j\,i})$.
En déduire que $\mathrm{rg}(F(E_{i\,i})) \leq \mathrm{rg}(F(E_{j\,j}))$, puis que $\mathrm{rg}(F(E_{i\,i})) = \mathrm{rg}(F(E_{j\,j}))$.
d) Etablir, pour $1 \leq i \leq p$, que les p matrices $F(E_{i\,i})$ sont des matrices de projection.
e) Etablir que $F(E_{11}) + F(E_{22}) + \ \ldots\ + F(E_{p\,p}) = I_{2\,p}$.
En déduire, à l'aide du résultat obtenu en II.2°, la valeur commune du rang et de la trace de ces p matrices de projection $F(E_{i\,i})$ pour $1 \leq i \leq p$.

4°) *Une base adaptée de l'espace vectoriel* $\mathbb{K}^{2\,p}$
a) Justifier l'existence de deux vecteurs u, v de $\mathbb{K}^{2\,p}$ formant une base de l'image de $F(E_{11})$ (l'image de la matrice $F(E_{11})$ s'identifiant à l'image de l'endomorphisme associé de $\mathbb{K}^{2\,p}$).
Etablir que $F(E_{11})\,u = u$ et $F(E_{11})\,v = v$.
b) Calculer les produits $F(E_{1\,k})\,F(E_{j\,1})\,u$ et $F(E_{1\,k})\,F(E_{j\,1})\,v$ selon les valeurs de j et k.
En déduire que la famille des $2p$ vecteurs suivants forme une base de $\mathbb{K}^{2\,p}$:

$$\mathcal{B} = (F(E_{11})\,u,\ F(E_{21})\,u,\ \ \ldots,\ F(E_{n\,1})\,u,\ F(E_{11})\,v,\ \ F(E_{21})\,v,\ \ \ldots,\ F(E_{n\,1})\,v).$$

c) Etant donnée une matrice $M = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} m_{i\,j}\, E_{i\,j}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, exprimer dans la base $\mathcal{B}$:

- le produit $F(M)\, F(E_{k\,1})\, u$ pour $1 \leq k \leq p$.
- le produit $F(M)\, F(E_{k\,1})\, v$ pour $1 \leq k \leq p$.

d) En déduire, si P désigne la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^{2\,p}$ à la base $\mathcal{B}$:

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad P^{-1}\, F(M)\, P = \left(\begin{array}{c|c} M & O_p \\ \hline O_p & M \end{array}\right).$$

5°) *Conclusion*

On conserve les notations précédentes et on note, avec des blocs A, B, C, D d'ordre p :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right).$$

a) Déduire de la question II.4.d) les égalités suivantes pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:

$$M\,C = C\,M \;\;;\;\; M\,D = D\,M \;\;;\;\; d(M)\,C = A\,M - M\,A \;\;;\;\; d(M)\,D = B\,M - M\,B.$$

b) Déduire de la question préliminaire qu'il existe des scalaires γ et δ tels que :

$$C = \gamma\, I_p \quad ; \quad D = \delta\, I_p.$$

c) Montrer que si γ et δ sont tous les deux nuls, alors la matrice P n'est pas inversible.

En déduire qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle qu'on ait :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad d(M) = X\,M - M\,X.$$

Ainsi, les seules dérivations de l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont celles étudiées à la partie I.

***