CCP 2009 PC
Math 2

Partie I

I.1.1 On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \exp(-zx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} x^n \text{ et } f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} x^{2n}}$$

qui sont bien des séries entières en x . comme l'égalité est vérifiée pour tout réel $\underline{R = +\infty}$

I.1.2 Si on pose $a_n = \frac{(-1)^n z^n x^n}{n!}$, $b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^p x^{2p}}{p! 2^p} \text{ si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}$ on a $\exp(-zx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

et

$$F(x,z) = \exp\left(-zx - \frac{x^2}{2}\right) = \exp(-zx) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

Les deux séries converge absolument donc on peut faire le produit de Cauchy des deux séries et pour tout x réel :

$$\boxed{F(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n} \left(\frac{(-1)^{n-k} z^{n-k}}{(n-k)!} x^{n-k}\right) \left(\frac{(-1)^{k/2}}{(k/2)! 2^{k/2}} x^k\right) \\ &= A_n(z) x^n \end{aligned}$$

avec

$$A_n(z) = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n} \left(\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right) \left(\frac{(-1)^{k/2}}{(k/2)! 2^{k/2}}\right) z^{n-k}$$

Comme on a $F(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) x^n$, la fonction $x -> F(x,z)$ est développable en sére entière avec un rayon de convergence infinie.

Et on a donc bien pour $A_n(z)$ un polynôme et pour $k = 0$ son terme dominant est $\frac{(-1)^n}{n!} \neq 0$

$$\boxed{A_k(z) \text{ est un polynôme de degré } n}$$

On remarque ensuite que le coefficient choisi pour définir H_n est justement celui qui normalise (rend unitaire) le polynôme.
$A_0(z) = a_0 = 1, A_1(z) = a_1 + 0 = -z$

$$\boxed{H_0(z) = 1, H_1(z) = z}$$

I.1.3 D'une part

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,z) = (-z - x) F(x,z) = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) z x^n - \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}(z) x^n$$

D'autre part par dérivation de la série entière sur $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert de convergence) , on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(z) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1}(z) x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient

$$\forall n \geq 1 \ , \ (n+1) A_{n+1}(z) = -z A_n(z) - A_{n-1}(z)$$

soit en translatant l'indice.:

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2) A_{n+2}(z) = -z A_{n+1}(z) - A_n(z)$$

et en multipliant par $(-1)^n (n+1)!$ on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}, \ H_{n+2}(z) = z H_{n+1}(z) - (n+1) H_n(z)}$$

et donc :

- $H_2(z) = z.z - 1.1 = z^2 - 1$
- $H_3(z) = z.(z^2 - 1) - 2.z = z^3 - 3z$
- $H_4(z) = z.(z^3 - 3z) - 3(z^2 - 1) = z^4 - 6z^2 + 3$

I.2.1 $f(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\underline{f'(x) = -xf(x)}$. On dérive cette relation :

$$\boxed{f''(x) = -xf'(x) - f(x)}.$$

En dérivant $n+1$ fois la relation $f'(x) = -xf(x)$ on obtient:

$$f^{(n+2)}(x) = -\left(xf'(x)\right)^{(n+1)}$$

Mais avec la formule de Leibniz de dérivation d'un produit:

$$\left(xf'(x)\right)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(k)} f'(x)^{(n+1-k)} = xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x) + \sum 0$$

et donc :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) + xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x) = 0}$$

I.2.2 On reporte $f^{(n)}(x) = (-1)^n f(x) K_n(x)$ dans la relation précédente (avec translation d'indices) et on divise par $(-1)^n f(x) \neq 0$ pour obtenir la relation

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0.}$$

- $K_0(x) = 1\dfrac{f(x)}{f(x)} = 1 = H_0(x)$
- $K_1(x) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x = H_1(x)$.
- les deux suites $(H_n(x))$ et $(K_n(x))$ vérifient la même relation de récurrence double et ont les mêmes premiers termes donc elles sont égales.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, K_n(x) = H_n(x)$$
- On vérifie par récurrence que K_n est pour tout n un polynôme . les deux polynômes sont égaux sur un ensemble infini donc ils sont formellement égaux.
$$\boxed{\text{dans } \mathbb{C}[X], \text{ on a l'égalité } K_n = H_n}$$

remarque : c'est une réponse, comme le sujet est ambiguë ce n'est pas la seule. A priori H_n est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et K_n une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ayant des ensembles de départ différents les fonctions ne peuvent pas être égales.L'égalité dans les réels suffit pour toute la suite.

I.3.1 On dérive $H_{n+1}(x) = K_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}\exp(x^2/2)f^{(n+1)}(x)$ comme un produit :

$$H'_{n+1} = (-1)^{n+1}x\exp(x^2/2)f^{(n+1)}(x) + (-1)^{n+1}\exp(x^2/2)f^{(n+2)}(x) = xH_{n+1}(x) - H_{n+2}(x)$$

donc (d'après **I.1.3**)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ H'_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x)}$$

I.3.2 Si on dérive cette relation on obtient pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$

$$H"_{n+1}(x) = (n+1)H'_n(x) = (n+1)nH_{n-1}(x)$$

Or d'après **I.1.3**)

$$H_{n+2}(x) = xH_{n+1}(x) - (n+1)H_n(x)$$

et donc pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$

$$H_n(x) = xH_{n-1}(x) - (n-1)H_{n-2}(x)$$

On reporte l'expression de H_{n-1} et H_{n-2} trouvée.

$$H_n(x) = +x\frac{H'_n(x)}{n} - (n-1)\frac{H"(x)}{n(n-1)}$$

En multipliant par $n(n-1)$ on a bien la relation du sujet.:

$$\forall n \geq 2\ ,\ \forall x \in \mathbb{R},\ H"_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$$

Ce n'est pas fini : Une relecture attentive (si on ne le voit peut-être pas dès le départ) montre qu'il faut $n \geq 2$ (pour parler de H_{n-2}) . On vérifie pour $n = 1$ $(x - x = 0)$ et $n = 0$ $(0.1 = 0)$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, H"_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0}$$

I.4 La fonction est bien C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'_n = (-1)^n \left(H'_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) - \frac{x}{2} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \right)$$

puis

$$\varphi''_n(x) = (-1)^n \left(H''_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) - xH'_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{4} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{2} H_n(xp \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \right)$$

donc

$$\varphi''_n(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = (-1)^n \left(H''_n(x) - xH'_n(x) - \frac{1}{2} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

d'où avec la relation de la question précédente :

$$\boxed{\varphi''_n(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi_n(x)}$$

I.5.1

Comme H_p est un polynôme normalisé de degré p on a $H_p(x) \sim_{\pm\infty} x^p$ et donc

$$x^2 H_p(x)H_q(x)f(x) \sim_{\pm\infty} x^{p+q+1} \exp\left(-x^2/2\right) = (u)^{\frac{p+q+2}{2}}\, e^{-u/2}$$

en posant $u = x^2$. Comme l'exponentiel l'emporte sur la puissance on a $\lim\limits_{\pm\infty} \left(x^2. \left|H_p(x)H_q(x)f(x)\right|\right) = 0$ ce qui (comme la fonction est continue sur $\mathbb{R}$) assure l'intégrabilité de la fonction sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{I_{p,q} \text{ est toujours définie}}$$

I.5.2 Comme $H_q(x) = K_q(x) = (-1)^q\, \dfrac{f^{(q)}}{f}$ par définition de la suite (K_n) et égalité des deux suites (cf **Q.2.2.**)

$$I_{p+1,q+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)H_q(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)(-1)^{q+1}f^{(q+1)}(x)dx$$

On se place sur un segment et on intègre par parties avec $\begin{cases} u = H_{p+1}, u' = H'_{p+1} = (p+1)H_p \text{ d'après } \textbf{Q.3.1.} \\ v' = (-1)^{q+1}f^{(q+1)}, v = (-1)^{q+1}f^{(q)} = -H_q f.\text{d'après } \textbf{Q.2.2.} \end{cases}$, u, v sont C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\int_a^b H_{p+1}(x)(-1)^{q+1}f^{(q+1)}(x)dx = -H_p(b)H_q(b)f(b) + H_p(a)H_q(a)f(a) + (p+1)\int_a^b H_p(x)H_q(x)f(x)dx$$

Mais $H_p(b)H_q(b)f(b) \sim_{b->+\infty} b^{p+q} \exp\left(-b^2/2\right)$ tend vers 0 si b tend vers $+\infty$ et de même $H_p(a)H_q(a)f(a)$ tend vers 0 si a tend vers $-\infty$ .Comme les fonctions sont intégrables, on peut aussi passer à la limite dans les intégrales:

$$I_{p+1,q+1} = 0 - 0 + (p+1)\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)dx = (p+1)I_{p,q}$$

et donc comme p et q jouent des rôles symétriques :

$$\boxed{I_{p+1,q+1} = (p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}}$$

- Si $p = q$ on a $I_{p,p} = p.I_{p-1,p-1}$ et donc une suite factoriel : $I_{p,p} = p!I_{0,0} = p!\sqrt{2\pi}$
- Si $p > q$ on a $I_{p,q} = pI_{p-1}, q$ et donc $I_{p,q} = p(p-1)\cdots(p-q+1)I_{p-q,0}$. Or

$$\begin{aligned} I_{p-q,0} &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_{p-q}f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{p-q} f^{(p-q)}(x)dx \\ &= (-1)^{p-q}\left[f^{(p-q-1)}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = (-1)^{p-q}\left[H_{p-q-1}f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 0 \text{ (l'exponentielle de } f \text{ l'emporte sur le polynôme de } H \text{)} \end{aligned}$$

  et donc $I_{p,q} = 0$ si $p > q$
- Si $q > p$ le calcul est symétrique :

$$\boxed{\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2 \ , \ I_{p,q} = \left\{ \begin{array}{l} p!\sqrt{2\pi} \text{ si } p = q \\ 0 \text{ si } p \neq q \end{array} \right.}$$

Remarque : les fonctions $(H_n)_{n\in N}$ *forment une base orthogonale et normalisée de* $\mathbb{R}[X]$ *pour le produit scalaire* $(P,Q) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} P($

Partie II

II.1 *Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre*

- Pour $t \in \mathbb{R}$, $\nu \mapsto F(t, 2i\pi\nu)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- Pour $\nu \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t, 2i\pi\nu)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable car $|F(t, 2i\pi\nu)| = \exp(-t^2/2) = f(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}$
- On a domination par la majoration précédente car $f(t)$ ne dépend pas de ν (le x du cours)

Le théorème du cours s'applique

$$\boxed{\hat{f} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

II.1 *Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre*

- Pour $t \in \mathbb{R}$, $\nu \mapsto F(t, 2i\pi\nu)$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial F(t, 2i\pi\nu)}{\partial \nu} = -2i\pi t F(t, 2i\pi\nu)$
- $\nu \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t, 2i\pi\nu)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable
- Pour $\nu \in \mathbb{R}$, $t \mapsto -2i\pi t F(t, 2i\pi\nu)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable car $|-2i\pi t F(t, 2i\pi\nu)| = 2\pi|t|\exp(-t^2/2)$ et donc $\lim\limits_{t->\pm\infty} \left(t^2 2\pi\,|t|\,F(t, 2i\pi\nu)\right) = 0$
- On a domination par la majoration précédente car $2\pi\,|t|\,f(t)$ ne dépend pas de ν
- le théorème de Leibniz s'applique

$$\boxed{\hat{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

II.3.1 Le théorème précédent nous donne aussi le calcul de la dérivée :
On a $\left(\hat{f}\right)'(\nu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t F(t, 2i\pi\nu)dt$. On transforme avec l'indication du sujet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t \exp\left(-2i\nu t - t^2/2\right) dt. = \int_{-\infty}^{+\infty} +2i\pi(2i\nu\pi)\exp\left(-2i\nu t - t^2/2\right) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi\left(-2i\pi\nu - t\right)\exp\left(-2i\nu t - t^2/2\right) dt.$$

On vient de casser une intégrale en deux, il faut justifier la convergence d'un morceau (ce qui implique celle de l'autre). Or la première est un multiple de $\widehat{f}$.
Dans la seconde on reconnaît $u'\exp(u)$ avec $u(t) = -2i\nu t - t^2/2$. donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi\nu - t)\exp\left(-2i\nu t - t^2/2\right) dt = \left[\exp\left(-2i\nu t - t^2/2\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Or $\left|\exp\left(-2i\nu t - t^2/2\right)\right| = \exp\left(-t^2/2\right)$ de limite nulle en $\pm\infty$.

$$\left(\hat{f}\right)'(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t \exp\left(-2i\nu t - t^2/2\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} +2i\pi(2i\nu\pi)\exp\left(-2i\nu t - t^2/2\right) dt = -4\pi^2\nu\widehat{f}(v)$$

$$\boxed{\left(\hat{f}\right)'(\nu) = -4\pi^2\nu\widehat{f}(v)}$$

On peut aussi faire une intégration par parties. en posant $u'(t) = -t\exp(-t^2/2)$,$u(t) = \exp(-t^2/2)$

II.3.2 $\widehat{f}$ est donc solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(\nu) = -4\pi^2\nu y(\nu)$. Le coefficient de y' est 1 , pas de problème de calcul :

$$\widehat{f}(v) = K\exp\left(\int -4\pi^2\nu d\nu\right) = K\exp\left(-2\pi^2\nu^2\right)$$

avec $K = \widehat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t\hat{}2/2)dt = \sqrt{2\pi}$

$$\boxed{\hat{f}(\nu) = \sqrt{2\pi}\exp(-2\pi^2\nu^2)}$$

Partie III

III.1.1 On a $|x| \leqslant A \leqslant 2\pi n$ donc $x - 2\pi n \leqslant 0$ et donc $x \mapsto f(x-2n\pi)$ est croissante sur $[-A, A]$ car f est croissante sur $\mathbb{R}^-$, de même comme $x + 2n\pi \geqslant 0$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x+2n\pi)$ est décroissante sur $[-A, A]$.
$u_n \geqslant 0$ et sur $[-A, A]$ on a d'après ci-dessus :

$$\begin{aligned} u_n(x) &= f(x-2n\pi) + f(x+2n\pi) \leqslant f(A-2n\pi) + f(-A+2n\pi) \\ u_n(x) &\leq 2\exp\left(-\frac{(2n\pi - A)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

.

III.1.2 Comme

$$\lim(n^2\exp\left(-\frac{(2n\pi-A)^2}{2}\right)) = \lim\left(\frac{2n^2}{(2n\pi-A)^2}.\frac{(2n\pi-A)^2}{2}.\exp\left(-\frac{(2n\pi-A)^2}{2}\right)\right) = 0$$

la série $\sum \exp\left(-\dfrac{(2n\pi-A)^2}{2}\right)$ converge et donc d'après **III.1.1.**$u_n(x)$ est majoré sur $[-A, a]$ à partir d'un certain rang par le terme général d'une série numérique convergente.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge normalement sur } [-A, A].}$$

III.2.1 En particulier $\sum u_n$ converge simplement sur $[-A, A]$ et comme pour tout réel x il existe A tel que $x \in [-A, A]$ par exemple $A = E(|x|) + 1$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

III.2.2 Les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et la convergence est normale sur $[-A, A]$ donc U est continue sur $[-A, A]$ ceci pour tout $A > 0$ donc comme au point précédent :

$$\boxed{U \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

III.2.3 En utilisant que f est paire et un changement d'indice :

$$U_n(-x) = \sum_{k=-n}^{n} f(-x-2k\pi) = \sum_{k=-n}^{n} f(x+2k\pi) = \sum_{p=-n}^{n} f(x-2p\pi) = U_n(x)$$

puis en faisant tendre n vers $+\infty$, $U(-x) = U(x)$.

$$\boxed{U \text{ est paire.}}$$

III.2.4

$$U_n(x+2\pi) = \sum_{k=-n}^{n} f(x-2(k-1)\pi) = \sum_{p=-n-1}^{n+1} f(x-2p\pi) = f(x+2(n+1)\pi) + \sum_{p=-n}^{n} f(x-2p\pi) - f(x-2n\pi)$$

or f a une limite nulle en $\pm\infty$ donc par composition :

$$\lim_{n->+\infty} f(x+2(n+1)\pi) = 0, \lim_{n->+\infty} f(x-2n\pi) = 0$$

et donc en passant à la limite : $U(x+2\pi) = 0 + U(x) - 0$.

$$\boxed{U \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

III.3.1 U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (admis), U est développable en série de Fourier.
III.3.2 La somme a un nombre fini de termes . on peut développer par linéarité. Le changement de variable $t = x - 2p\pi$ C^1 bijectif permet d'avoir une variable d'intégration indépendante de k . Les bornes sont alors cohérentes pour avoir la relation de Chasles.

0.1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} U_k(x)\cos(nx)dx &= \sum_{p=-k}^{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-2p\pi)\cos(nx)dx = \sum_{p=-k}^{k} \int_{-\pi-2p\pi}^{\pi-2p\pi} f(t)\cos(nt+2kn\pi)dt \\
&= \sum_{p=-k}^{k} \int_{-\pi-2p\pi}^{\pi-2p\pi} f(t)\cos(nt)dt = \int_{-\pi-2p\pi}^{\pi-2p\pi} f(t)\cos(nt)dt
\end{aligned}$$

III.3.3 En reprenant les majoration de **III.1.1.** avec $A = \pi$ on a sur $[-\pi, \pi]$, $|(f(x-2n\pi) + f(x+2n\pi))\cos(nx)| \leq |(f(x-2n\pi) + f(x+2n\pi))| \leq 2\exp\left(-\dfrac{(2n\pi-\pi)^2}{2}\right)$ et donc la convergence normale de $\sum u_n \cos(nx)$ sur $[-\pi, \pi]$. La série converge normalement sur le **segment** donc on peut intégrer termes à termes**.**

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos(nx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\cos(kx)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_k(x)\cos(kx)dx \\
&= \lim_{n->+\infty} \left(\sum_{k=0}^{K} \int_{-\pi}^{\pi} u_k(x)\cos(kx)dx \right) = \lim_{n->+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} U_K(x)\cos(nx)dx \right)
\end{aligned}$$

On peut intégrer terme à terme dans la seconde somme car le nombre de termes est fini.

III.3.4

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\Re e\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(inx - x^2/2)dx\right) = \frac{1}{\pi}\Re e(\hat{f}(-n/2\pi))$$

on a trouvé à la fin du **II.** $\hat{f}(\nu) = \sqrt{2\pi}\exp(-2\pi^2\nu^2)$ et donc

$$\boxed{a_n = \sqrt{2/\pi}\exp\left(-\frac{n^2}{2}\right)}$$

et $b_n = 0$ car la fonction est paire.