PARTIE I

On utilisera le produit scalaire canonique ${}^tXY$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1. On vérifie que ${}^tMSM$ est symétrique car le transposé du produit est le produit des transposés dans l'ordre inverse.

   Pour toute matrice colonne X on a : ${}^tX\left({}^tMSM\right)X = {}^t(MX)\,S\,(MX)$. Soit en posant $Y = MX$, ${}^tX\left({}^tMSM\right)X = {}^tYSY$. Comme $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ on a ${}^tYSY \geq 0$ et donc ${}^tX\left({}^tMSM\right)X \geq 0$

   $$\boxed{S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ {}^tMSM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

2. Si X est un vecteur propre de S , on a $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $SX = \lambda X$. On a don ${}^tXSX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$ soit comme $X \neq 0$, $\lambda = \dfrac{{}^tXSX}{\|X\|^2}$

   - – si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ on a ${}^tXSX \geq 0$ et donc $\lambda \geq 0$
     – si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXSX > 0$ (car $X \neq 0$) et donc $\lambda > 0$

   Réciproquement S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale : $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, $S = PD^tP$

   On en déduit en posant $X = PY$:avec $Y = (y_i)_{i=1}^n$ que ${}^tXSY = {}^tY{}^tPS^tPPY = {}^tYDY = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$

   - – Si $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$, $\forall i, \lambda_i \geq 0$ et donc ${}^tXSY \geq 0$
     – Si$Sp(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\forall i, \lambda_i > 0$ et donc ${}^tXSY \geq 0$ et de plus

   $${}^tXSY > 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i y_i^2 = 0 \Rightarrow \forall i, y_i = 0 \Rightarrow X = PY = 0$$

   $$\boxed{S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}^+}$$
   $$\boxed{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}^{+*}}$$

3. A est symétrique réelle de polynôme caractéristique $\lambda^2 - 3\lambda + 1$. La somme et le produit des racine sont strictement positifs. Donc les racines sont strictement positives.

   $$\boxed{A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

4. -1 est valeur propre évidente de B donc

   $$\boxed{B \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

5. Si deux matrices sont semblables elles ont mêmes valeurs propres donc les valeurs propres ont le même signe :

   $$\boxed{S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

6. **a)** Si λ est une valeur propre nulle , les vecteurs propres associés sont des vecteurs non nuls du noyau de M . M n'est pas inversible : absurde

   Si λ est une valeur propre non nul de M,il existe une matrice colonne non nulle X telle que $MX = \lambda X$, on a donc $X = \dfrac{MX}{\lambda}$, si on prend $Y = MX$ on a un matrice non nulle (M est inversible) vérifiant $M^{-1}Y = \dfrac{1}{\lambda}Y$ et donc $\dfrac{1}{\lambda} \in Sp(M^{-1})$. Réciproquement si $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de M^{-1} (inversible) $\dfrac{1}{1/\lambda} = \lambda$ est valeur propre de $\left(M^{-1}\right)^{-1} = M$

   $$\boxed{\text{si } M \text{ inversible } \lambda \in Sp(M) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in Sp\left(M^{-1}\right)}$$

   b) Si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ on a prouvé $Sp(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$, 0 n'est pas valeur propre de S donc S est inversible. Les valeurs propres de S^{-1} sont les inverses des valeurs propres de S donc sont strictement positives. Et donc $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

   $$\boxed{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

7. D'après le calcul de la première question, si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ on a $\lambda = \dfrac{{}^tXSX}{\|X^2\|}$. On suppose ici : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX = 0$ et donc $\lambda = 0$.

   S est symétrique donc diagonalisable dans un base orthonormale : $S = PD^tP = P0^tP = 0$

8. **DANGER :** malgré la notation utilisée, on ne sait à priori rien de la relation $\leq$ sur les matrices.. Il ne vaut pas utiliserune propriété de la relation avant de l'avoir prouvée. En particulier la transitivité n'existe pas.

Comme $0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $S \leq S$

$$\boxed{\leq \text{ est réflexive}}$$

a) Si $S_1 \leq S_2$ et $S_2 \leq S_1$ on a $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a donc pour toute colonne X : ${}^tX(S_2 - S_1)X \geq 0$ et ${}^tX(S_2 - S_1)X \leq 0$ et donc ${}^tX(S_2 - S_1)X = 0$. D'après la question précédente on a donc $S_2 - S_1 = 0$ donc $S_2 = S_1$

$$\boxed{\leq \text{ est antisymétrique.}}$$

b) On prend $S_1 = 0$ et $S_2 = \operatorname{diag}(-1, 1, \cdots 1)$. Les deux matrices sont symétriques et $S_2 - S_1$ a une valeur propre négative donc $S_2 - S_1 \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et de même pour $S_1 - S_2$.

Le contre exemple ne marche que pour $n \geq 2$. Pour $n = 1$, la relation $\leq$ est la relation d'ordre usuelle sur l'unique coefficient réel de la matrice . Donc c'est un ordre total.

$$\boxed{\text{pour } n \geq 2 \text{ , } \leq \text{ n'est pas "total"}}$$

c) Pour $n \geq 2$ on prend $S_1 = 0$ et $S_2 = \operatorname{diag}(0, 1, \cdots 1)$ symétriques ,les valeurs propres de $S_2 - S_1$ sont 0 et 1 : $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), S_2 \neq S_1$ et $S_2 - S_1 \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

d) Si S_1 et S_2 sont symétriques αS_1 et αS_2 sont symétriques : la question a un sens.

Pour une matrice M on sait (ou on retrouve) : $\begin{cases} \text{si } \alpha = 0 \text{ , } Sp(\alpha M) = \{0\} \\ \text{si } \alpha \neq 0 \text{ , } \lambda \in Sp(M) \Leftrightarrow \alpha\lambda \in Sp(\alpha M) \end{cases}$. En prenant $M = S_2 - S_1$ et en regardant le signe on a :

$$S_1 \leq S_2 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \alpha = 0 \text{ , } S_2 = S_1 \\ \text{si } \alpha > 0 \text{ , } \alpha S_1 \leq \alpha S_2 \\ \text{si } \alpha < 0 \text{ , } \alpha S_2 \leq \alpha S_1 \end{cases}$$

e) Toutes les matrices sont bien symétriques.

On a $(S + S_2) - (S + S_1) = S_2 - S_1$ et donc

$$\boxed{S_1 \leq S_2 \Rightarrow \forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ , } S + S_1 \leq S + S_2}$$

9. On a ${}^tMS_2M - {}^tMS_1M = {}^tM(S_2 - S_1)M$. On peut appliquer la première question à $S = S_2 - S_1$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ , } S_1 \leq S_2 \Rightarrow {}^tMS_1M \leq {}^tMS_2M}$$

10.

On a $SX = \lambda X \Leftrightarrow (S - I_n)X = (\lambda - 1)X$, $\lambda \in Sp(S) \Leftrightarrow (\lambda - 1) \in Sp(S - I_n)$.

Les valeurs propres de $S - I_n$ sont positives .Les valeurs propres de S sont plus grande que 1.

Elle sont donc non nulles et S est bien inversible.

Les valeurs propres de S^{-1} sont les inverses des valeurs propres de S (cf **Q6**) . Elle sont donc toutes inférieures à 1.Les valeurs propres de $I_n - S^{-1}$ sont positives.

$$\boxed{I_n \leq S \Rightarrow S^{-1} \leq I_n}$$

11.

a) Si $S = {}^tMM$ on a pour toute colonne X : ${}^tXSX = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \geq 0$, et comme M est inversible $X \neq 0 \Rightarrow MX \neq 0 \Rightarrow \|MX\|^2 > 0$

$$\boxed{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

b) Si $S = D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$ est diagonale définie positive alors les λ_i sont positifs et $M = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_i}\right)$ est une solution du problème.

c) Dans le cas général on diagonalise S dans une base orthonormée $S = PD^tP$. On prend $M = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_i}\right)^t P$ et on a ${}^tMM = PD^tP = S$.

12. Comme $S_1 > 0$, S_1 est symétrique , définie positive, et on peut appliquer la question précédente.
On a $I_n = {}^tM_1^{-1t}M_1M_1M_1^{-1} = {}^tM_1^{-1}S_1M_1^{-1}$. On peut appliquer la question 9 :

$$S_1 \leq S_2 \Rightarrow {}^tM_1^{-1}S_1M_1^{-1} \leq {}^tM_1^{-1}S_2M_1^{-1} \Rightarrow I_n \leq {}^tM_1^{-1}S_2M_1^{-1}$$

D'après **Q10** ${}^tM_1^{-1}S_2M_1^{-1}$ est inversible donc aussi $S_2 = {}^tM_1 \left({}^tM_1^{-1}S_2M_1^{-1} \right) M_1$ comme produit de matrices inversibles.
et de plus $\left({}^tM_1^{-1}S_2M_1^{-1}\right)^{-1} \leq I_n$
On a donc $M_1S_2^{-1t}M_1 \leq I_n = M_1S_1^{-1t}M_1$ et donc par **Q9**: $S_2 \leq S_1$

$$\boxed{0 < S_1 \leq S_2 \Rightarrow S_2^{-1} \leq S_1^{-1}}$$

PARTIE II

1.

a) Une résolution par Pivot de Gauss donne comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\left\{ \begin{array}{l} P_1 = \dfrac{S - \lambda_2 I_n}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ P_2 = \dfrac{S - \lambda_1 I_n}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{array} \right.$. Ce sont des matrices symétriques par combinaisons linéaires de matrices symétriques.

b) Si $S = PDP^{-1}$ on a $P_1 = P\dfrac{D - \lambda_2 I_n}{\lambda_1 - \lambda_2}P^{-1} = PD_1P^{-1}$ avec $D_1 = \dfrac{\text{diag}\,(\lambda_1 - \lambda_2, \cdots, \lambda_1 - \lambda_2, 0 \cdots, 0)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{diag}\,(1, \cdots 1, 0, \cdots, 0)$
et de même $P_2 = PD_2P^{-1}$ avec $D_2 = \text{diag}\,(0, \cdots, 0, 1, \cdots, 1)$
On a $D_1^2 = D_1, D_2^2 = D_2, D_1D_2 = D_2D_1 = 0, rg(D_1) = n_1, rg(D_2)n_2$. Et donc en faisant le changement de base $P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2, P_1P_2 = P_2P_1 = 0, rg(P_1) = n_1, rg(P_2) = n_2$

c) P_1 et P_2 commutant, on peut développer $S = \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2$ par le binôme de Newton , et comme tous les produits P_1P_2 sont nuls on a :

$$S^k = \lambda_1^kP_1^k + \sum 0 + \lambda_2^kP_2^k$$

Et comme $P_1^2 = P_1$ il est évident par récurrence que pour tout $k \geq 1$ $P_1^k = P_1$.
Et donc pour $k \geq 1$: $S^k = \lambda_1^kP_1 + \lambda_2^kP_2$.
Par construction la formule est aussi vraie pour $k = 0$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \text{ , } S^k = \lambda_1^kP_1 + \lambda_2^kP_2}$$

On a donc

$$Q(S) = \sum_{k=0}^{d} q_kS^k = \sum_{k=0}^{d} q_k\lambda_1^kP_1 + \sum_{k=}^{d} q_k\lambda_2^kP_2 = Q(\lambda_1)P_1 + Q(\lambda_2)P_2$$

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}[\mathbb{X}] \text{ : } Q(S) = Q(\lambda_1)P_1 + Q(\lambda_2)P_2}$$

d) $S - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. Si $\lambda = 1$ on a une matrice de rang 1 , donc 1 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$, La trace donne la dernière valeur propre $n+1$.
Les formules du **a)** donnent :

$$P_1 = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix} \text{ , } P_2 = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **a)** Comme S est symétrique :

$$(u(x)|y) = {}^t(SX)\,Y = {}^tX^tSY = {}^tXSY = (x|u(y))$$

C'est la définition même d'un endomorphisme symétrique.

b) On prend $x \in E_i$ et $y \in E_j$, on a donc $u(x) = \lambda_i x$ et $u(y) = \lambda_j y$. En reportant dans $(u(x)|y) = (x|u(y))$ on a $(\lambda_j - \lambda_i)\,(x|y) = 0$, Soit comme $\lambda_j \neq \lambda_i$, $(x|y)$

u est diagonalisable donc $\oplus_{i=1}^{p} E_i = \mathbb{R}^n$.

c) Par orthogonalité on a pour tout x et tout y $(p_i(x)|y) = (x|p_i(y)) = (p_i(x)|p_i(y))$. Ce qui assure que p_i est symétrique, donc aussi P_i .

Par orthogonalité si $x \in E_j$, on a $x \perp E_i$ donc $p_i(x) = 0$. On a donc pour $j \neq i$, $E_j \subset \mathrm{Ker}(p_i)$ et donc $\oplus_{j\neq i} E_j \subset \mathrm{Ker}(P_i)$. Comme $\oplus_{j\neq i} E_j$ et $\mathrm{Ker}(P_i)$ sont deux supplémentaires de $E_i = \mathrm{Im}(p_i)$, ils ont même dimension et l'inclusion prouve l'égalité.

d) On prend $x \in E$ et on décompose x dans $\oplus_{i=1}^{p} E_i$, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $x_i \in E_i$.

- - On a la décomposition $x = x_i + \displaystyle\sum_{i\neq j} x_i$ avec $x_i \in E_i$, $\displaystyle\sum_{i\neq j} x_i \in (E_i)^{\perp}$ donc pour tout j $p_j(x) = x_j$ soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i(x)$ et donc $\sum p_i = I_n$
  - on a aussi $u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u(x_i) = \sum_{=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i(x)$ et donc $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i$

La suite du sujet étudie des fonctions définie sur l'ensemble des matrices symétriques et l'intégrale de telles fonctions.