



## EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

**MATHEMATIQUES 1****Durée : 4 heures***Les calculatrices sont interdites*

\*\*\*\*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*\*

**Notations et objectifs**

$n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes à coefficients réels,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ ,  $GL_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $I_n$  désigne la matrice identité d'ordre  $n$  et pour toute matrice  $A$ ,  ${}^tA$  désigne la transposée de  $A$ .

Selon le contexte,  $0$  désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , soit encore la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On rappelle que pour toute matrice symétrique réelle d'ordre  $n$ , il existe  $P$  appartenant à  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $D$  diagonale réelle d'ordre  $n$  telles que  $S = PDP^{-1}$ .

$\mathbb{R}^n$  est muni de son produit scalaire canonique noté  $(\cdot | \cdot)$  et de la norme associée notée  $\|\cdot\|$ .

Une matrice  $S$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX S X \geq 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX S X > 0$$

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  positives et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  définies positives.

Soit  $A$  une application d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui à  $t$  associe la matrice  $A(t)$  de coefficient d'indices  $i, j$ ,  $a_{ij}(t)$ . Si pour tout  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ , l'application  $t \mapsto a_{ij}(t)$  est intégrable sur  $I$ , on note  $\int_I A(t) dt$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coefficient d'indices  $i, j$ ,  $\int_I a_{ij}(t) dt$ .

L'objectif de ce problème est d'étudier la notion de fonction matriciellement croissante.

Dans la première partie on étudiera les notions de matrices symétriques réelles positives et définies positives, puis on définira sur l'ensemble des matrices symétriques réelles une relation d'ordre. Diverses propriétés de cette relation seront utilisées dans les deux parties suivantes.

Dans la seconde partie, on définira ce qu'est une fonction matriciellement croissante (ou décroissante) et on étudiera des exemples de fonctions homographiques et puissances.

La troisième et dernière partie fera appel à une représentation intégrale et permettra de montrer que la fonction logarithme népérien et la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  pour  $\alpha \in ]0, 1[$  sont matriciellement croissantes.

**Dans tout le problème,  $S$  désigne une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$ .**

## PARTIE I

**I.1** Montrer que si  $S$  appartient à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , alors pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^tMSM$  appartient aussi à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

**I.2** Montrer que  $S$  appartient à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

**I.3** Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  est symétrique positive. Est-elle symétrique définie positive ?

**I.4** Soit la matrice  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Est-elle symétrique définie positive ?

**I.5** Montrer que si  $S$  appartient à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et si  $T$  est une matrice symétrique réelle semblable à  $S$ , alors  $T$  appartient aussi à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

**I.6 a)** Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $M$ , alors  $\lambda$  est non nul et  $\lambda^{-1}$  est valeur propre de  $M^{-1}$ . En déduire le spectre de  $M^{-1}$  en fonction du spectre de  $M$ .

**b)** Montrer que si  $S$  appartient à  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $S$  est inversible et  $S^{-1}$  appartient à  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**I.7** Montrer que si pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tX SX = 0$ , alors toute valeur propre de  $S$  est nulle et  $S = 0$ .

**I.8** On munit  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  des relations notées  $\leq$  et  $<$ , définies respectivement par :

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, (S_1 \leq S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

et

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, (S_1 < S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$$

**a)** Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$  et  $S_2 \leq S_1$ , montrer que  $S_1 = S_2$ .

**b)** Si  $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ , montrer que l'on n'a pas nécessairement  $S_1 \leq S_2$  ou  $S_2 \leq S_1$ .

**c)** Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$ ,  $S_1 \neq S_2$ , a-t-on  $S_1 < S_2$  ?

**d)** Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$  et  $\alpha$  un réel, comparer les matrices  $\alpha S_1$  et  $\alpha S_2$  pour la relation  $\leq$ .

**e)** Si  $S$ ,  $S_1$  et  $S_2$  sont trois matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$ , comparer les matrices  $S + S_1$  et  $S + S_2$  pour la relation  $\leq$ .

**I.9** Soit  $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$  avec  $S_1 \leq S_2$ . Montrer que pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^tMS_1M \leq {}^tMS_2M$ .

**I.10** On suppose  $I_n \leq S$ .

**a)** Que peut-on dire des valeurs propres de  $S$  ? En déduire que  $S$  est inversible.

**b)** Que peut-on dire des valeurs propres de  $S^{-1}$  ? En déduire :  $0 < S^{-1} \leq I_n$ .

**I.11 a)** Montrer que s'il existe  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = {}^tMM$ , alors  $S$  est symétrique définie positive.

**b)** Montrer que si  $S$  est diagonale définie positive, alors il existe  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = {}^tMM$ .

**c)** Montrer que ce résultat subsiste si  $S$  est symétrique définie positive non diagonale.

**I.12** Soit  $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$  tel que  $0 < S_1 \leq S_2$  et  $M_1 \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $S_1 = {}^tM_1M_1$ . Montrer que  $I_n \leq {}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1}$ , en déduire que  $S_2$  est inversible et  $S_2^{-1} \leq S_1^{-1}$ .

## PARTIE II

**II.1** Dans cette question seulement, on suppose d'une part que  $n$  est supérieur ou égal à 2 et d'autre part que  $S$  possède exactement deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de multiplicités respectives  $n_1$  et  $n_2$ .

**a)** Montrer qu'il existe un unique couple  $(P_1, P_2)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que :

$$\begin{cases} I_n = P_1 + P_2 \\ S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \end{cases}$$

Expliciter les deux matrices  $P_1, P_2$  en fonction de  $S, I_n, \lambda_1, \lambda_2$  et montrer qu'elles sont symétriques.

**b)** Si  $P$  est une matrice orthogonale telle que  $P^{-1}SP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2)$  (où  $\lambda_1$  est répété  $n_1$  fois et  $\lambda_2$   $n_2$  fois), exprimer  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ) en fonction de  $P$ , de  $P^{-1}$  et d'une matrice diagonale. En déduire que  $P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2, P_1P_2 = P_2P_1 = 0$  et donner les rangs de  $P_1$  et  $P_2$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .

**c)** Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}, S^k = \lambda_1^k P_1 + \lambda_2^k P_2$  et en déduire pour  $Q \in \mathbb{R}[X]$  l'expression de  $Q(S)$  en fonction de  $P_1, P_2, Q(\lambda_1)$  et  $Q(\lambda_2)$ .

**d)** Soit  $S_0$  la matrice de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1 sauf les coefficients diagonaux qui valent 2. Vérifier que  $S_0$  admet exactement deux valeurs propres et déterminer les matrices  $P_1$  et  $P_2$  associées.

**II.2** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont  $S$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $u$  et  $E_1, E_2, \dots, E_p$  les sous-espaces propres de  $u$  respectivement associés.

**a)** Montrer que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (u(x) | y) = (x | u(y))$ .

**b)** Montrer que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , les sous-espaces propres  $E_i$  et  $E_j$  sont orthogonaux. Que vaut la somme directe  $\bigoplus_{i=1}^p E_i$  ?

**c)** Si  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note  $p_i(x)$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $E_i$ . La matrice de  $p_i$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est notée  $P_i$ .

i) Montrer que la matrice  $P_i$  est symétrique.

ii) Si  $x_j$  est élément de  $E_j$ , évaluer  $p_i(x_j)$  et en déduire que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j, P_iP_j = 0$ .

**d)** Montrer que  $\sum_{i=1}^p P_i = I_n$  et  $\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i = S$ .

La décomposition  $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$  est dite décomposition spectrale de  $S$ .

**II.3** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sont dans  $I$ , on définit la matrice  $f(S)$  par

$$f(S) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i)P_i$$

**a)** Montrer que  $Sf(S) = f(S)S = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(\lambda_i)P_i$ .

**b)** Si  $X$  est vecteur propre de  $S$  pour la valeur propre  $\lambda_k$ , montrer que  $X$  est aussi vecteur propre de  $f(S)$  et préciser la valeur propre correspondante.

**c)** Calculer  $\cos(\pi S_0)$  où  $S_0$  est la matrice introduite en **II.1 d)**.

L'application  $f$  sera dite matriciellement croissante (respectivement matriciellement décroissante) sur  $I$  si pour tout  $n \geq 1$  et tout couple  $(A, B)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les valeurs propres sont dans  $I$  :

$$A \leq B \implies f(A) \leq f(B) \quad (\text{respectivement } f(B) \leq f(A))$$

**II.4 a)** Soit  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ . A quelle condition sur la matrice  $S$  peut-on définir  $g(S)$  ? Montrer qu'alors  $g(S) = S^{-1}$  et en déduire que  $g$  est matriciellement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

**b)** Soit  $h : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x+1}$ . A quelle condition sur la matrice  $S$  peut-on définir  $h(S)$  ? Montrer qu'alors  $h(S) = I_n - (S + I_n)^{-1}$  et en déduire que  $h$  est matriciellement croissante sur  $] -1, +\infty[$ .

**II.5** Pour  $\alpha > 0$ , soit  $p_\alpha : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  et pour tout  $x$  réel, soit  $A(x)$  et  $B(x)$  les matrices définies par :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{ch } x} \end{pmatrix}$$

**a)** Montrer que pour tout  $x$  réel,  $B(x) \leq A(x)$ .

**b)** Pour  $x \neq 0$ , déterminer explicitement la décomposition spectrale de  $A(x)$ .

**c)** En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}, p_\alpha(A(x)) = A(\alpha x)$ .

**d)** Montrer que  $p_\alpha(B(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\text{ch } x)^\alpha} \end{pmatrix}$ .

**e)** Calculer  $\det [p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))]$ . En donner un équivalent simple au voisinage de  $x = 0$  et en déduire que pour  $\alpha > 1, p_\alpha$  n'est pas matriciellement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

### PARTIE III

**On suppose désormais que  $S$  est définie positive.**

**III.1 a)** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))$  une application telle que pour tout  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2, t \mapsto a_{ij}(t)$  est intégrable sur  $I$ . Montrer que pour toute matrice colonne  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), t \mapsto {}^t X A(t) X$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I {}^t X A(t) X dt = {}^t X \left( \int_I A(t) dt \right) X$$

b) Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  intégrable sur  $I$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Justifier l'existence de  $\int_I f(t)M dt$  et montrer que :

$$\int_I f(t)M dt = \left( \int_I f(t) dt \right) M$$

**III.2** Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $F$  la fonction donnée par  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha} dt$ .

a) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $F(x)$  existe.

b) Montrer, en utilisant par exemple le changement de variable  $u = xt$ , qu'il existe une constante  $C$  strictement positive telle que pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = Cx^\alpha$ .

c) Montrer que pour tout  $t > 0$ ,  $S^{-1} + tI_n$  est inversible et  $(S^{-1} + tI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i t} P_i$ .

d) En déduire  $F(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} (S^{-1} + tI_n)^{-1} dt$ .

e) Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telles que  $A \leq B$ . Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall t > 0, {}^t X (A^{-1} + tI_n)^{-1} X \leq {}^t X (B^{-1} + tI_n)^{-1} X$$

En déduire que  $F$  est matriciellement croissante sur  $]0, +\infty[$ , puis que pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , la fonction  $p_\alpha$  introduite en **II.5** est matriciellement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

**III.3 a)** Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \ln x$ .

b) En déduire  $\ln S = \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} I_n - (S + tI_n)^{-1} \right) dt$ .

c) Montrer que la fonction  $\ln$  est matriciellement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

**Fin de l'énoncé**





