PROBLEME

Notions générales sur les applications - Complément de cours

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application définie sur A et à valeurs dans B.
Définition de l'injectivité :
On dit que f est **injective** si

pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ admet **au plus** une solution x **dans l'ensemble** A

On verra, dans le courant de l'année, d'autres caractérisations des fonctions injectives.
Définition de la surjectivité :
On dit que f est **surjective** si

pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ admet **au moins** une solution x **dans l'ensemble** A

Définition de la bijectivité :
On dit que f est **bijective** (ou f est **une bijection**) si

pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ admet exactement **une et une seule** solution **dans l'ensemble** A

Ainsi : f est **bijective** si et seulement si f est **injective et surjective**.
Définition d'un antécédent :
Si $b \in B$ et $x \in A$ vérifient $f(x) = b$, on dit que x est **un antécédent** de b par la fonction f. Ainsi, si $b \in f(A)$ (voir définition ci-dessous), cet élément possède, par construction, au moins un antécédent dans A par f !
Définition de l'image directe d'un ensemble :
Soit $X \subset A$ une partie de A, on définit l'ensemble $f(X)$, dit **image** (directe) de X par f comme l'ensemble des images des éléments de X par f. Ainsi

$$f(X) = \{f(x), x \in X\}$$

Ainsi : $f(X)$ est l'ensemble de tous les éléments de la forme $f(x)$ pour x parcourant l'ensemble X.
On a donc

$y \in f(X)$ si et seulement si y peut s'écrire sous la forme $y = f(x)$ avec un $x \in X$

En d'autres termes, $y \in f(X)$ si et seulement si y admet un antécédent dans X par f.
Définition de l'image réciproque d'un ensemble :
Soit $Y \subset B$ une partie de B, on définit l'ensemble $f^{-1}(Y)$, dit **image réciproque** de Y par f, comme l'ensemble des éléments x de A tels que $f(x)$ soit dans Y. Ainsi

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A,\ f(x) \in Y\}$$

Ainsi $f^{-1}(Y)$ est l'ensemble de tous les x de A dont l'image $f(x)$ est dans l'ensemble Y.
On a donc

$x \in f^{-1}(Y)$ si et seulement si $f(x) \in Y$

En d'autres termes, $f^{-1}(Y)$ est l'ensemble des antécédents, par f, des éléments de l'ensemble Y.
Quelques rappels : comment prouver l'inclusion ou l'égalité de deux ensembles
Soit A et B, deux ensembles.

- Prouver l'inclusion $A \subset B$: cela revient à montrer que, pour tout élement x de A, on a forcément $x \in B$. Autrement dit :
$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A,\ x \in B).$$

- Prouver l'égalité $A = B$: cela peut se traduire par double inclusion. Ainsi, on montre d'abord $A \subset B$ (en vérifiant que, pour tout $x \in A$, on a bien $x \in B$) puis $B \subset A$ (en vérifiant que, pour tout $y \in B$, on a bien $y \in A$).
  Il est parfois possible de montrer l'égalité des ensembles par équivalence :
  $$(x \in A) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x \in B).$$
  Dans ce cas, on a bien prouvé l'égalité d'ensemble $A = B$.

Un exemple :

L'application $f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z^2 + z + 1 \end{array} \right.$ n'est pas injective. En effet l'équation $f(z) = 1$ (qui équivaut à $z^2 + z = 0$) admet deux solutions $z = 0$ et $z = -1$. L'élément $b = 1$ a donc deux antécédents par f. Elle est surjective car l'équation $f(z) = b$ admet, selon la nullité ou pas de $\Delta = 1 - 4(1 - b)$, une ou deux racines dans $\mathbb{C}$ (donc toujours au moins une).
Pour f, on a $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ (les images des réels sont réels), mais $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ (tout réel strictement inférieur à $\frac{3}{4}$ ne peut pas être dans $f(\mathbb{R})$).
Par ailleurs, avec cette décomposition, il est aisé de prouver $f(\mathbb{R}) = [\frac{3}{4}, +\infty[$.
Pour la détermination de $f^{-1}(\mathbb{R})$, on cherche les $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. Or

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 = f(z) \in \mathbb{R} &\iff z^2 + z + 1 = \overline{z}^2 + \overline{z} + 1 \iff z^2 - \overline{z}^2 + z - \overline{z} = 0 \\ &\iff (z - \overline{z})(z + \overline{z} + 1) = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} z = \overline{z} \text{ i.e } z \in \mathbb{R} \\ \text{ou } z + \overline{z} = -1 \text{ i.e } \operatorname{Re}(z) = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

EXERCICE

1. On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x + \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$.

   (a) Etudier ses propriétés (parité, périodicité, variations) et représenter l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

   (b) L'application $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est-elle surjective ? Injective ? Bijective ? On pourra s'appuyer sur le schéma précédent pour justifier les réponses.

   (c) Toujours en s'aidant de la représentation graphique de f, déterminer les images directes suivantes :
   $$f(\mathbb{R}^*) = ? \quad f(]0, +\infty[) = ? \quad f([1, +\infty[) = ? \quad f(]0, 1]) = ? \quad f(]0, 2[) = ?$$

   (d) Même chose pour déterminer les images réciproques suivantes :
   $$f^{-1}(\mathbb{R}) = ? \quad f^{-1}(]-\infty, -2]) = ? \quad f^{-1}([2, \frac{5}{2}]) = ? \quad f^{-1}([-1, +1]) = ?$$

   (e) Justifier qu'il existe une partie B de $\mathbb{R}$ (à déterminer) telle que l'application
   $$g : \left| \begin{array}{ccc}]0, 1] & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & g(x) = x + \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$
   soit une bijection.

(f) Dans ce cas, tout élément y de B possède, par g, un et un seul antécédent x dans $]0,1]$. Déterminer l'expression de x en fonction de y i.e la fonction h telle que $x = h(y)$.
Vocabulaire : on dit que la fonction $h : B \to]0,1]$ est la **bijection réciproque** de la fonction $g :]0,1] \to B$ (notation $h = g^{-1}$).

2. On considère la fonction $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & F(z) = z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$.
   (a) Résoudre l'équation $F(z) = \dfrac{3+i}{2}$.
   (b) F est-elle injective ?
   (c) En fonction du complexe $\omega \in \mathbb{C}$, déterminer le nombre de solutions, dans $\mathbb{C}^*$, de l'équation $F(z) = \omega$. Que peut-on en conclure concernant F ?
   Dans le cas où il y a plusieurs solutions, quelles relations existe-t-il entre elles ?
   (d) Déterminer l'image réciproque $F^{-1}(\mathbb{C})$.
   (e) Déterminer l'image réciproque $F^{-1}(\mathbb{R})$.
   (f) Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier $F(e^{i\theta})$.
   En déduire l'image directe $F(\mathbb{U})$ où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des complexes de module 1.
   (g) Soit un réel $x \in [-2,2]$: déterminer précisément les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $F(z) = x$.
   Montrer que toute solution z de cette équation est de module 1.
   Justifier correctement que l'image réciproque de l'intervalle réel $[-2,2]$ par F est exactement $\mathbb{U}$ i.e $F^{-1}([-2,2]) = \mathbb{U}$.

Exercice 1 On considère un carré $ABCD$ et on note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à $ABCD$.
Pour tout point P du plan, on note :

$$S_n(P) = PA^n + PB^n + PC^n + PD^n.$$

On se propose de déterminer les entiers n supérieurs ou égaux à 1 tels que la quantité $S_n(P)$ soit constante lorsque le point P décrit le cercle $\mathcal{C}$.
On choisit un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que les points A et B aient pour affixes respectives 1 et i. Enfin, on note E le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Mise en équation
   (a) Faire un schéma et donner les affixes de C et D.
   (b) Soit P un point de $\mathcal{C}$ d'affixe $z = a + ib$. Montrer que $S_n(P)$ peut s'écrire sous la forme
   $$S_n(P) = 2^{\frac{n}{2}} \left(U^{\frac{n}{2}} + V^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} + Y^{\frac{n}{2}} \right),$$
   où U, V, X et Y sont des expressions de a et b que l'on simplifiera au maximum.
2. Des cas particuliers
   Justifier que, pour $n \in \{2,4,6\}$, la quantité $S_n(P)$ ne dépend pas de $P \in \mathcal{C}$. On précisera la valeur (constante) de $S_n(P)$ dans ces trois cas.
3. Deux inégalités
   (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :
   $$\text{pour tout entier } n \geq 1, \text{ on a } 2^n > 2\left(2 - \sqrt{2}\right)^n.$$
   En déduire, pour $n \geq 1$: $2^{\frac{n+1}{2}} > 2\left(2 - \sqrt{2}\right)^{\frac{n}{2}}$.
   (b) Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_n = \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^n$, est décroissante.
   En déduire : pour tout entier $n \geq 9$, $2^n > 2(2+\sqrt{2})^{\frac{n}{2}}$.

4. Résolution du problème
   (a) Calculer $S_n(A)$ et $S_n(E)$.
   (b) On suppose que $S_n(P)$ est constante lorsque P parcourt $\mathcal{C}$: à l'aide des questions précédentes, montrer $n \leq 8$.
   (c) Conclure.

Exercice 2 `Localisation des racines d'un polynôme`

On considère le polynôme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où $n \geq 2$ et vérifiant les conditions :

- a_n et a_{n-1} sont des réels avec $a_n \geq 1$ et $a_{n-1} > 0$
- $\forall k \in [\![\, 0\,;\, n-2 \,]\!] = \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $a_k \in \mathbb{C}$.

On note $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-2}|\} = \max\{|a_k| \mid k \in [\![\, 0\,;\, n-2 \,]\!]\}$: M est donc la plus grande des valeurs $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-2}|$.

1. Soit z, une racine complexe du polynôme P de partie réelle strictement positive.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{z}$ a également une partie réelle strictement positive.
   (b) On suppose, de plus, $|z| > 1$. Justifier toutes les inégalités suivantes :
   $$1 \leq \operatorname{Re}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right) \leq M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} \leq \frac{M}{|z|^2 - |z|}.$$
   En déduire : $\left| |z| - \dfrac{1}{2} \right| \leq \dfrac{\sqrt{1+4M}}{2}$ puis $|z| \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.
   (c) Que peut-on déjà affirmer avec ces résultats ? Illustrer par un schéma.
2. Soit z une racine du polynôme P.
   Montrer que $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ ou $|z| \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.
3. Une application
   On considère le polynôme $Q(X) = X^3 + \dfrac{1}{2}X^2 - (7+4i)X - 5 - 10i$.
   (a) Sans les calculer, hachurer la partie du plan complexe dans laquelle on est certain de trouver toutes les racines (réelles ou complexes) du polynôme Q.
   (b) Le polynôme Q possède une racine réelle r : chercher sa valeur.
   (c) En déduire toutes les racines du polynôme Q. Les placer sur le schéma de la question **3a**.