Exercice 1

Soit $a \in]0, +\infty[$ avec $a \neq 1$. On définit **le logarithme de base** a, et on note $\log_a$, l'application

$$\log_a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array} \right. \text{, où } \ln \text{ est le logarithme népérien}$$

1. Pour quelle valeur de a a-t-on $\log_a = \ln$?
2. Justifier les propriétés suivantes
   - $\log_a(1) = 0$
   - $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} : \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
   - si $b \in]0, +\infty[$, $b \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \log_b(x) = \log_b(a) \log_a(x)$ *(formule de changement de base)*
   - si $c \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \dfrac{1}{c} \log_a(x) = \log_{a^c}(x)$
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R} : y = \log_a(x) \Longleftrightarrow x = a^y$
3. Montrer que la fonction $\log_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
4. **APPLICATION 1**
   Déterminer tous les couples $(a, x) \in \left(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right)^2$ tels que
   $$\log_a(x) = \log_x(a).$$
5. **APPLICATION 2**
   Soit $(a, b, c) \in \left(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right)^3$ tels que
   $$\log_a(c) - \log_b(c) = \log_a(c) \log_b(c).$$
   Quelle relation simple lie a, b et c ?
6. **APPLICATION 3**
   Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Résoudre l'équation :
   $$\log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}.$$
7. **APPLICATION 4**
   Soit $a > 0$, $a \neq 1$. Résoudre l'inéquation :
   $$\log_a(x) < \log_{a^3}(3x - 2).$$
8. **APPLICATION 5**
   Soient x, y et z trois réels strictement positifs tels que
   $$2 \log_x(2y) = 2 \log_{2x}(4z) = \log_{2x^4}(8yz) \neq 0..$$
   La valeur de xy^5z peut s'exprimer sous la forme $\dfrac{1}{2^{\frac{p}{q}}}$ avec $\dfrac{p}{q}$ fraction rationnelle irréductible.
   Que vaut $p + q$?
9. **APPLICATION 6**
   Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\log_{24 \sin x}(24 \cos x) = \dfrac{3}{2}$. Calculer $y = \dfrac{1}{24} \tan^2(x)$.
10. **APPLICATION 7**
    Soient x, y et z trois réels strictement positifs tels que
    - $\log_2(xyz - 3 + \log_5(x)) = 5$
    - $\log_3(xyz - 3 + \log_5(y)) = 4$
    - $\log_4(xyz - 3 + \log_5(z)) = 4$

    Déterminer la valeur de $|\log_5(x)| + |\log_5(y)| + |\log_5(z)|$.

Exercice 2 Pour tout k réel, on définit la fonction f_k sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \mathrm{ch}(x) + k\,\mathrm{sh}(x),$$
et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Soit M_0, un point de coordonnées $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$: préciser, en fonction de x_0 et y_0, le nombre de courbes $\mathcal{C}_k$ qui passent par ce point M_0.
2. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{T}_k$, la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse $\ln(2)$.
   (a) Calculer $\mathrm{ch}(\ln 2)$ et $\mathrm{sh}(\ln 2)$.
   (b) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}_k$.
   (c) Prouver l'équivalence suivante, où A et B désignent deux constantes réelles :
   $$(\forall k \in \mathbb{R},\ Ak + B = 0) \Leftrightarrow (A = B = 0).$$
   (d) Montrer que toutes les droites de la famille $(\mathcal{T}_k)_{k\in\mathbb{R}}$ sont concourantes en un point Ω dont on précisera les coordonnées.
3. Tracer, dans un même repère, les courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{T}_k$ pour $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$

Exercice 3 Soit f, la fonction définie par $f(x) = 2\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. On pose $\varphi(t) = \arcsin(\sin t)$: déterminer, en fonction de $t \in [-\pi, \pi]$, une expression simplifiée de $\varphi(t)$ (il y a plusieurs cas...). Puis représenter l'allure de la courbe représentative de φ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
3. (a) Justifier que, pour tout $x \in D$, on peut poser $\theta = \arcsin(x)$.
   (b) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ en fonction de $x \in D$, et représenter l'allure de la courbe représentative de f.
4. Une seconde méthode
   (a) Pour quels x de D peut-on calculer $f'(x)$? Justifier ces résultats.
   Calculer et simplifier $f'(x)$.
   (b) Retrouver alors les résultats précédents.

Exercice 4 On pose : $f(x) = \dfrac{\arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1+2x-2x^2}{2}\right)}$.

1. Justifier que f est définie sur $[0, 1]$.
2. Montrer : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) + f(1-x) = 1$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 Pour s'amuser : vous avez une calculatrice dont l'écran affiche le nombre 1 et qui ne dispose que des touches $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\tan}$, $\boxed{\arcsin}$, $\boxed{\arccos}$ et $\boxed{\arctan}$. Montrer que l'on peut lui faire afficher le nombre 2.