Exercice

Il est impératif de traiter les questions (1.) à (4.)

On pose

$$u_n = \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2} \mathrm{d}x \qquad \text{où } \ln^n(x) = (\ln(x))^n \text{ et } n \text{ entier naturel.}$$

On rappelle : $0! = 1$ et, pour $n \geq 1$, $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et calculer u_0.
2. A l'aide d'une intégration par parties donner une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n. En déduire u_1 et u_2.
3. A l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que $u_n = \displaystyle\int_a^b t^n g(t)\,\mathrm{d}t$ où les constantes a, b et la fonction g sont à préciser.
4. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?
5. Montrer qu'il existe une suite d'**entiers naturels** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = n! - \dfrac{b_n}{e}$. Préciser b_0, b_1, b_2 ainsi qu'une relation de récurrence entre b_{n+1} et b_n.
6. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(b_n)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{b_n}\right)$.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \leq b_n$ et en déduire un encadrement de $\left(\dfrac{n!}{b_n} - \dfrac{1}{e}\right)$ faisant intervenir une factorielle.
8. On désire calculer $\dfrac{1}{e}$ à 10^{-3} près.
   (a) A l'aide de ce qui précède, donner un rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ tel que $\left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{e}\right| \leq 10^{-3}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
   En déduire, si $n \geq 1$: $b_n \geq 2 \times n!$.
   (c) Peut-on améliorer la réponse à la question (**8a**) ?
9. On rappelle la définiton de la **partie entière** $\lfloor x \rfloor$ d'un réel x : il s'agit de l'unique entier relatif N vérifiant $N \leq x < N+1$. Autrement dit, pour $x \in \mathbb{R}$, on a la caractérisation :
$$\boxed{(N = \lfloor x \rfloor) \Leftrightarrow (N \in \mathbb{Z} \text{ et } N \leq x < N+1)}.$$
Montrer que, pour $n \geq 2$, on a $b_n = \lfloor e n! \rfloor$.
Cette égalité est-elle encore vérifiée pour $n = 1$? $n = 0$?