Exercice 1

On désire calculer la quantité $\Phi(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2(t^2+1)}$ par trois méthodes.

Étude générale de $\Phi(x)$

1. On pose $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$.
   Sur quel(s) ensemble(s) la fonction f admet-elle des primitives ?
2. En déduire l'ensemble de définition D de la fonction Φ.
3. Pour $x \in D$, quelle relation y a-t-il entre $\Phi(x)$ et $\Phi(\dfrac{1}{x})$?

1ère méthode

1. Soit $x \in D$: exprimer $\Phi(x)$ à l'aide de F, où F désigne une primitive quelconque de f sur le bon intervalle (que l'on précisera).
2. Justifier que Φ est dérivable sur D : calculer et simplifier $\Phi'(x)$.
3. En déduire une expression précise de $\Phi(x)$ pour tout $x \in D$.

2ème méthode

1. Pour tout $x \in D$: effectuer le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale $\Phi(x)$.
2. Simplifier et calculer la quantité $\Phi(x) + \Phi(x)$.
3. Retrouver l'expression de $\Phi(x)$.

3ème méthode

1. La théorie de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles assure l'existence des constantes réelles a, b, c et d vérifiant $f(t) = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{(t+1)^2} + \dfrac{ct+d}{t^2+1}$ pour tout réel $t \neq -1$.
   Déterminer ces constantes.
2. Déterminer alors l'expression générale des primitives de f sur les ensembles à préciser.
3. Retrouver à nouveau l'expression de $\Phi(x)$.

Une application numérique

Soit un réel α vérifiant $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Calculer $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{1+\sin(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 2

1. (a) Soit p et q, deux entiers naturels : $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On pose :
   $$B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q \mathrm{d}t.$$
   Déterminer une relation simple entre $B(p,q)$ et $B(p+1,q-1)$.
   En déduire une relation entre $B(p,q)$ et $B(p+q,0)$ puis donner la valeur de $B(p,q)$ en fonction de p et q.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer :
   $$\int_0^1 t^n\,(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$$
Donner une expression intégrale de u_n.
3. Montrer :
$$u_n = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{2t^2-2t+1}\mathrm{d}t.$$
4. Déterminer le maximum de $t(1-t)$ pour $t \in [0,1]$.
5. En déduire :
$$\left|u_n - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$
Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
6. On pose
$$\beta_n = \frac{2^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$
Calculer pour $n \geq 0$, en fonction de n, $\dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$.
7. Exprimer pour $n \geq 2$, en fonction de βn,
$$u_n - u_{n-1} \quad \text{et} \quad u_{n-1} - u_{n-2}.$$
8. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence
$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= \frac{4}{3} \\ \forall n \geq 2, \quad (2n+1)u_n - (3n+1)u_{n-1} + nu_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$
9. Quel terme calculer pour obtenir π à 10^{-10} près ?
Quelle méthode utiliser pour calculer ce terme ?
10. <u>Thème de recherche</u> : en remplaçant le 2^n par x^n où x est convenablement choisi, peut-on trouver des suites qui convergent vers $\pi\sqrt{3}$, $\ln 2$?
Pour cela, on pose
$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$$
Justifier :
$$u_n(x) - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{xt^2-xt+1} = -x^{n+1}\int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{xt^2-xt+1}\mathrm{d}t$$
et calculer la première intégrale pour $|x| < 4$ selon le signe de $x \neq 0$.