Exercice 1 «$\mathrm{DL}_n(a)$» signifie «développement limité d'ordre n au point a».

1. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto g(x) = \dfrac{e^x}{1+\mathrm{ch}(x)}$.
2. Pour tout paramètre k réel, on définit la fonction f_k par :
$$f_k(x) = \sqrt{1+x} + k\frac{e^x}{1+\mathrm{ch}(x)}.$$
Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f_k.
3. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé.
   (a) Donner une équation de T_k, tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0.
   (b) Montrer que, pour k parcourant $\mathbb{R}$, toutes les droites T_k sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.
4. Déterminer, en fonction de k, la position relative au voisinage de 0 de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{T}_k$: illustrer ces différentes situations par un schéma clair.
5. (a) Déterminer les primitives de f_k.
   (b) Existe-t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x = 0$?

Exercice 2 Soit $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \sqrt{1+x^2}$, de courbe représentative $\mathcal{C}$.

1. Donner D_f, le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de f à tous les bords de D_f.
3. Déterminer toutes les droites asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$. Préciser également leurs positions (locales) relatives avec $\mathcal{C}$: résumer ces résultats sur un schéma clair.

Exercice 3 On pose, pour tout $x \in I =]-\infty, \frac{1}{2}[$:
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}} - e^{3x} - \ln(1-2x)}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$
Montrer qu'il est possible de choisir α pour que f soit continue en 0, et que, dans ce cas, f est dérivable en 0 : préciser la tangente et l'allure locale de la courbe représentative de f au voisinage de $x = 0$.

Exercice 4 On considère l'équation différentielle (E) :

$$« \ |x|y'(x) + (x-2)y(x) = e^{-x} \ »$$

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$.

   (b) Montrer que, parmi ces solutions, il y en a une et une seule qui possède une limite finie en 0. On note y_1 cette solution.

   (c) Déterminer le développement limité d'ordre de $y_1(x)$ 2 en $x = 0^-$ (au voisinage de 0 à gauche).

2. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $I_2 =]0, +\infty[$. On note y_2 les solutions, décrites à l'aide d'un paramètre réel k.

   (b) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $y_2(x)$ en $x = 0^+$ (au voisinage de 0 à droite).

3. On note f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x < 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \\ y_2(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Montrer qu'il existe un et un seul choix de α pour lequel f est continue sur $\mathbb{R}$.

   Dans ce cas, pour quelles valeurs de k la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

   L'équation différentielle (E) possède-t-elle une solution sur l'ensemble $\mathbb{R}$?

   Tracer l'allure locale, au voisinage de $x = 0$ de cette fonction f avec $k = 1$.

Exercice 5 Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit le problème $\mathcal{P}_a$ suivant :

$$\mathcal{P}_a : \boxed{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ f \text{ est } \textbf{continue} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}^+, \ x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = a\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}.$$

A l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer en fonction de a, toutes les solutions du problème $\mathcal{P}_a$.