Exercice 1 Décrire, en fonction des valeurs du paramètre réel m, l'ensemble des solutions du système :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} mx & & & + & z & = & 1 \\ & & my & + & 4z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & mz & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 2 Le Professeur de Mathématiques décide d'interroger tous les jours un étudiant pris au hasard dans la classe pour savoir s'il connait son cours. La probabilité pour que ce soit le cas est de $\frac{2}{3}$. On note p_n la probabilité de l'événement « les étudiants interrogés le jour numéro n et le jour numéro $n+1$ connaissent leur cours, et c'est la première fois que c'est le cas deux jours consécutifs». Le jour de la rentrée est le jour numéro 0, et il y a bien interrogation orale, même ce jour-là.

1. Que valent p_0 et p_1 ?
2. On **admet** que la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n+1} \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$
3. Prouver : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
4. On pose $P := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer son inverse P^{-1}.
Vérifier que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
5. En déduire A^n pour $n \geqslant 0$, puis une expression de p_n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_n)$?
6. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)$.

Exercice 3 On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -8 & -6 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer[1], en fonction du paramètre réel λ, le rang de la matrice $(A - \lambda I)$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe exactement deux réels λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$ pour lesquels $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.
2. (a) Déterminer les matrices colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AC_1 = \lambda_1 C_1$.
Désormais C_1 représente l'unique matrice de ce type avec $x_1 = 1$.

1. Indication : on pourra commencer par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

(b) Déterminer les matrices colonnes $C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AC_2 = \lambda_2 C_2$.

Désormais C_2 représente l'unique matrice de ce type avec $x_2 = 1$.

(c) Déterminer les matrices colonnes $C_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AC_3 = \lambda_2 C_3 + C_2$.

Désormais C_3 représente l'unique matrice de ce type avec $x_3 = 1$.

3. On définit la matrice (concaténation des trois colonnes) $P = \begin{pmatrix} C_1 & | & C_2 & | & C_3 \end{pmatrix}$.
   Vérifier qu'il existe une matrice $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure, telle que $AP = PT$.
4. Montrer que P est une matrice inversible et calculer son inverse P^{-1}.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$.
6. <u>Calcul de T^n</u>

   (a) On définit la matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Que vaut N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$?

   (b) En déduire une expression de T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis une expression de A^n.
7. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(B)$, le commutant de la matrice A. On rappelle :
   $$C(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}.$$
   $C(B)$ est donc l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec B.

   (a) Prouver que $C(B)$ est stable par combinaison linéaire et pour le produit matriciel.

   (b) Prouver que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence suivante :
   $$M \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C(T).$$

   (c) Montrer que les éléments de $C(T)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ où a, e et f sont des réels décrivant $\mathbb{R}$.

   (d) En déduire l'ensemble $C(A)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de trois matrices (fixes) que l'on précisera et que l'on appellera J, K, L. On note $C(A) = \mathrm{Vect}(J, K, L)$.

   (e) Prouver que, si α, β et γ sont trois réels tels que $\alpha J + \beta K + \gamma L = 0$, alors on a nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On dit que les matrices J, K et L *forment une famille libre* (ou *sont linéairement indépendantes*).

(f) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet de réels $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$A^n = \alpha_n J + \beta_n K + \gamma_n L.$$

8. Le but de cette question est de résoudre l'équation, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$(E) \quad «M^2 + 2M = A»$$

   (a) Montrer que M est solution de (E) si et seulement si $M'^2 + 2M' = T$, où $M' = P^{-1}MP$.

   (b) Montrer : si $M'^2 + 2M' = T$, alors $M' \in C(T)$.

   (c) Conclure.

Exercice 4 `Exercice facultatif`

Soit $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + py' + y = 0.$$

Une solution de (E) est donc une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; y''(x) + p(x)\, y'(x) + y(x) = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle à coefficients non constants, le cours ne s'applique donc pas !
On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{ch}(x)}$.

Partie A : wronskien d'un couple de solutions.

On suppose que g et h sont deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ et on définit sur $\mathbb{R}$, le wronskien W de g et h par $W(x) = g'(x)\, h(x) - g(x)\, h'(x)$.

1. Justifier que W est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer W' en fonction de g, h et de leurs dérivées.
2. Montrer que W est solution d'un équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. On notera (E_W) cette équation.

Partie B : ajustement de l'équation

1. Justifier que f est bien dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une fonction p pour que f soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ en entier.
   On supposera désormais que p est la fonction trouvée à cette question.

Partie C : recherche d'une autre solution de (E)

Soit g une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et W le wronskien de g et f.

1. Résoudre l'équation (E_W) et exprimer $W(x)$ à l'aide d'une constante $K_1 \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que g est solution de l'équation différentielle
$$(E_g) \qquad x\mathrm{ch}\,(x)\, y'\,(x) + (x\mathrm{sh}\,(x) - \mathrm{ch}(x))y\,(x) = K_1.$$
3. Résoudre (E_g) sur $I_1 =]0, +\infty[$: on donnera les solutions à l'aide de K_1 et d'une seconde constante notée K_2.
4. A l'aide du résultat précédent, donner une autre solution que f, sur $\mathbb{R}$, de (E). On notera g cette solution.

Partie D : famille libre de fonctions - base de l'ensemble des solutions de (E).

Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que la famille (u, v) est **libre** si
$$\text{« pour tout } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \left(\lambda u + \mu v = \tilde{0} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0\right) \text{ ».}$$
Ainsi pour montrer qu'une famille de deux fonctions est libre, on suppose que λ et μ sont deux réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda u\,(x) + \mu v\,(x) = 0$ et on montre qu'alors, nécessairement, $\lambda = \mu = 0$.

1. Deux exemples : montrer que la famille (u, v) est libre lorsque
   (a) $u = \cos$ et $v = \sin$.
   (b) $u = \exp$ et $v(x) = \sqrt{1 + x^2}$
2. Montrer que la famille (f, g) est libre.
3. On admet le résultat suivant : si (u, v) est un famille libre de solutions de (E) alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $\lambda u + \mu v$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   Donner la solution de (E) telle que $y\,(0) = y'\,(0) = 1$, on notera h cette solution.
4. Calculer, pour $a > 0$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} h(t)\mathrm{d}t$. Puis en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \left(\int_{-a}^{a} h(t)\mathrm{d}t\right)$.