

Exercice 1 **ENSEA-ENSAM**

1. Montrer que $\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\alpha)$ puis que si $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ alors

$$(a^2 \cos^2(\alpha) + b^2 \sin^2(\alpha)) (b^2 \cos^2(\alpha) + a^2 \sin^2(\alpha)) = a^2 b^2 + \frac{(a^2 - b^2)^2}{4} \sin^2(2\alpha).$$

2. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi (at + bt^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.
3. Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \in]-1, 1[$, montrer que si $f(x) = \arctan\left(\tan(a) \frac{1-x}{1+x}\right)$ alors f est dérivable sur $] -1, 1[$, et $f'(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x + e^{2ia}}\right)$.

4. Déterminer les matrices de M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit M une solution, montrer qu'il existe trois matrices A, B et C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que M soit une combinaison linéaire de A, B et C .

5. Soit $I = \int_{-\ln(2)}^0 \frac{dx}{3\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x}$, déterminer $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $I = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{a} + b \arctan \sqrt{2}\right)$

6. Montrer que $1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$, en déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Petites Mines

7. Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^x + x - 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
8. Soit $f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$, peut-on prolonger f en une fonction continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

9. Soient $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$.

On pourra raisonner par récurrence sur n .

10. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(3-x)}$, et F la primitive de f sur $]3, +\infty[$ nulle pour $x = 4$.

Etudier les asymptotes de G définie sur $]3, +\infty[$ par $G(x) = xF(x)$.

11. Soit F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_{1+\sin x}^{\cos x} e^{t^2+x} dt$, déterminer la dérivée en $x = 0$.

12. Exprimer $\sin(3x)$ à l'aide de puissances de $\sin x$ et de $\cos x$. En déduire les primitives de $x \mapsto \frac{\sin(3x)}{2 - \sin^2(x)}$ (poser ensuite $u = \cos x$).

CCP

13. Quelles sont les racines de $2z^2 + 3z + 2$ sur \mathbb{C} ?

14. Montrer que pour $n \geq 7$, $\left| e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1 \right| < 1$.
15. Etudier l'équation $\arctan(x) + x = 1$.
16. Résoudre $(z+1)^n = -(z-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ est l'inconnue.
17. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' + \frac{x}{x^2-1}y = 2x$.
18. Résoudre $2x^2y' + y = 1$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, +\infty[$ et sur \mathbb{R} .
19. Soit P un polynôme unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré 3 et tel que $P(0) = 0$. Calculer $P(1) + P(j) + P(j^2)$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
20. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n définie par $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$. Déterminer le maximum u_n de f_n sur $[0, 1]$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
21. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n définie par $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x+n}{1+nx}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
- (a) On fixe $x \in]0, +\infty[$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- (b) Quelle est la monotonie de f_n sur $]0, +\infty[$?
22. On considère la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f(t) = \frac{1-t^3}{t}$.
- (a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle I à préciser.
- (b) Soit u la bijection réciproque, définie sur I , montrer que $\forall x \in I, u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$.
- (c) Justifier que u est dérivable sur I et que pour $x \in I, u'(x) = \frac{-u(x)}{3u(x)^2 + x}$.
- (d) Montrer que $u(1) \geq \frac{1}{2}$ et que $|u'(x)| \leq \frac{1}{3u(x)}$.
- (e) Montrer que $u(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
23. Soient $a > 0$ et $S_a : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application qui à f associe
- $$S_a(f) : x \mapsto \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt.$$
- (a) Soit $f : t \mapsto \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)$, déterminer $S_a(f)$.
- (b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $S_a(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 .
- (c) Montrer que S_a n'est ni injective, ni surjective.
24. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \lambda u_n$.
- (a) On suppose que $-\frac{1}{4} < \lambda < 0$, montrer que $X^2 - X - \lambda$ admet deux racines réelles. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- (b) On suppose que $-1 < \lambda < -\frac{1}{4}$, montrer que $X^2 - X - \lambda$ admet deux racines complexes r et \bar{r} , comparer $|r|$ et 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

(c) On suppose que $\lambda = -\frac{1}{4}$, expliciter u_n si $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$.

25. Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et soient F et G les deux fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par

$$F(x) = I_3 + (e^x - 1)J \text{ et } G(x) = I_3 - (e^x + 1)J$$

(a) Calculer J^2 , la matrice J est-elle inversible ?

(b) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x)F(y) = F(x+y)$, que peut-on en déduire sur l'inversibilité de $F(x)$?

(c) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer de même $G(x)G(y)$. Que peut-on en déduire ?

(d) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $G(x) = F(y)G(x)F(y)^{-1}$.

Mines-Ponts

26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et g_n définie sur $[0, 1]$ par $g_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

Justifier que g_n est dérivable sur $[0, 1]$ et que $\forall t \in [0, 1], |g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.

Centrale PC

27. Soit $T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculer T^k pour $k \in \mathbb{N}$.

28. (Sans calculatrice) Comparer π^3 et 3^π (quel est le plus grand ?).

29. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$.

30. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer les applications f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a - x)$

Pour le fun

31. Peut-on placer tous les carrés de côté de longueur $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$) dans un carré de longueur 1 sans qu'ils se chevauchent ?

32. Soit $\mathcal{M} = \{P \subset \mathbb{R}, P \neq \emptyset, P \text{ minorée}\}$, l'ensemble des parties non vides et minorées de \mathbb{R} , et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :

$$(f \text{ croissante sur } \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\forall P \in \mathcal{M}, f(\inf(P)) \leq \inf(f(P))).$$

Exercice 21. **Polytechnique-ESPCI - PC - 2014**

Montrer que M , matrice carrée possédant un et un seul terme non nul par ligne et par colonne, est inversible.

2. **Polytechnique-ESPCI - PC - 2014**

Trouver toutes les fonctions u de classe C^1 sur $[-1, +1]$ vérifiant : $xu'(x) + u(x) = x$

3. **Polytechnique-ESPCI - PC - 2014**

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on note $M = \begin{pmatrix} 0 & z & z^2 \\ z^{-1} & 0 & z \\ z^{-2} & z^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat subsiste-t-il pour $n = -1$?

4. **Mines-Ponts - PC - 2014**

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{((x+1)^{1/x} - x^{1/x})(x \ln(x))^2}{x^{x^{1/x}} - x}$.

5. **CENTRALE - PC - 2014**

Montrer que A , matrice réelle de taille n , dont les coefficients diagonaux sont nuls et tous les autres valent 1, est inversible, et donner son inverse.

6. **CENTRALE - PSI - 2014**

Résoudre dans \mathbb{C} : $(1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer le produit des solutions non nulles.

7. **CCP - MP - 2014**

Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice dont tous les coefficients valent 1. Exprimer $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

à l'aide de J et de I_3 , et en déduire un polynôme annulateur de A de degré 2. Calculer A^n .

8. **CCP - PC - 2014**

On pose : $g(x) = x \sin(x)$: calculer $g''(x) + g(x)$.

Résoudre sur \mathbb{R} : (E_1) « $y'' + y = \cos(x)$ » et (E_2) « $y'' - y = x$ ».

Donner toutes les solutions paires de (E_1) et les solutions impaires de (E_2) .

Trouver toutes les fonctions f de classe C^2 sur \mathbb{R} telles que : $f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$.

9. **CCP - PC - 2014**

Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(t) = e^{e^t-1}$.

En déduire $f^{(k)}(0)$ pour $0 \leq k \leq 3$.

10. **CCP - PSI - 2014**

Montrer que $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x) - 1} - \frac{2}{x^2}$ et $g(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2}$ sont définies pour $x \neq 0$ puis qu'elles sont prolongeables par continuité en 0.

11. **TELECOM Sud Paris - MP - 2014**

Soit $M = I_n + X^t Y$ où $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. Montrer que M^2 est combinaison linéaire de I_n et de M . Discuter l'inversibilité de M .

12. **ENTPE - PSI -2014**

Montrer que $|\cos(n)| + |\sin(n)| \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13. **TELECOM Sud Paris - PSI - 2014**

Quel est le rang de la matrice carrée de taille n dont les coefficients valent $m_{i,j} = 1 + a_i a_j$ où les a_k sont des réels ?

14. **ENSAM - PT - 2014**

Montrer que l'ensemble des polynômes P solutions de « $P(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$ » est stable par combinaison linéaire.

Montrer que, si P est solution, P' l'est aussi.

Montrer qu'un polynôme P de degré 2 ne peut pas être solution et conclure quant à l'ensemble des solutions polynomiales de ce problème.

15. **ENSAM - PT - 2014**

On note C une matrice colonne à n lignes ($n \geq 2$), et L une matrice ligne à n colonnes et $A = CL - I_n$. Peut-on avoir $A = I_n$? Montrer : $A^2 = (LC - 2)A + (LC - 1)I_n$.

16. **CCP - TSI -2014**

Résoudre $x^2 y' + y = 1$ dans $]0, +\infty[$ et $] - \infty, 0[$.

On note f une solution sur $]0, +\infty[$: étudier la limite de f en 0^+ .

Résoudre l'équation différentielle sur \mathbb{R} .

17. **Polytechnique-ESPCI - PC - 2013**

La suite de terme général $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}$ (n radicaux) converge-t-elle? Si oui, quelle est sa limite ?

18. **MINES-PONTS - PSI -2013**

Trouver la limite ℓ de la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

19. **CCP - MP - 2013**

Montrer que, si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

Trouver le signe de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

20. **CCP - PC - 2013**

Montrer que $T(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^x}$ existe sur \mathbb{R} .

Montrer : $T(x) + T(-x) = 1$, interprétation ?

Calculer $T(0), T(1), T(-1), T(2), T(-2)$.

21. **CCP - PC - 2013**

Montrer : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2t}{\pi} \leq \sin(t) \leq t$.

22. **CENTRALE - PC - 2012**

Soit A , matrice dont les coefficients de la première ligne, la première colonne et la diagonale valent 1, tous les autres étant nuls. Montrer que A est inversible et trouver son inverse.

23. **ENTPE - MP - 2012**

Montrer que $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ existe et que (I_n) tend vers 0.

Trouver un développement asymptotique à deux termes de I_n de la forme $I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

24. **PT - 2012**

Soit f , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivable en 0. Trouver la limite en 0 de $\frac{f(2x) - f(x)}{2x}$.

25. **CCP - TSI - 2012**

Déterminer toutes les suites (u_n) telles que $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

Soit f telle que : $\forall x \in [0, 1], 2x - f(x) \in [0, 1]$ et $f(2x - f(x)) = x$.

On pose : $v_0 = \alpha \in [0, 1], v_{n+1} = 2v_n - f(v_n)$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, 1], v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n, v_n = n(\alpha - f(\alpha)) + \alpha$.

Montrer $f(\alpha) = \alpha$. Conclusion ?