Exercice 1 Pour tout entier $n \geqslant 3$, on considère l'équation

$$(E_n) : x^n - nx + 1 = 0.$$

On définit la fonction f_n par : $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

Une première suite

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, 1]$.
   Justifier que l'équation (E_n) admet, pour chaque entier $n \geqslant 3$, une unique solution x_n dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$.
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$, et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$.
   La suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge-t-elle ?
3. Justifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n^n) = 0$.
4. En déduire l'équivalent : $x_n \sim \dfrac{1}{n}$, et préciser la limite de $(x_n)_{n\geqslant 3}$.
5. Montrer qu'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + x_n^n)^n = 1$.
6. En déduire un équivalent simple de $\left(x_n - \dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$, et un développement asymptotique de x_n à deux termes.

Une seconde suite

1. Montrer que l'équation (E_n) possède, pour tout entier $n \geqslant 3$, une seule racine y_n dans l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$.
2. Déterminer la valeur de la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n}$.
3. En déduire qu'on a, à partir d'un certain rang : $1 < y_n < \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. La suite $(y_n)_{n\geqslant 3}$ converge-t-elle ?
5. Montrer que l'on a l'équivalent : $(y_n - 1) \sim \dfrac{\ln n}{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
   On a donc un développement asymptotique de y_n à deux termes : $y_n = 1 + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.