Exercice 1

PREMIÈRE PARTIE : étude de la réciproque de la fonction th

On rappelle les définitions de ch, sh et th, les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer que la fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
   On note argth sa réciproque.
2. Démontrer que argth est impaire.
3. Démontrer que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
4. Exprimer la fonction argth à l'aide des fonctions usuelles.
5. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de la fonction argth en 0.

DEUXIÈME PARTIE : étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ x.y' + 3.y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

6. Résoudre (E) sur l'intervalle $J =]0,1[$. Peut-on trouver une solution de (E) sur $[0,1[$?

TROISIÈME PARTIE : étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
« déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables en zéro et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2} \text{»}.$$

7. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
8. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
9. Montrer que, si f est solution, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   On pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
10. Montrer que, si f est solution, $-f$ est aussi solution.
11. Montrer que la fonction th est une solution du problème posé.
    Dans les questions **12** à **16**, on suppose que
    f est solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.
    On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
    $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right).$$
12. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
13. Etablir une relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.
14. En utilisant les résultats des questions **12** et **13**, aboutir à une contradiction.

15. Que peut-on dire si l'hypothèse «$f(0) = 1$» est remplacée par l'hypothèse «$f(0) = -1$» ?
16. Conclusion ?

    Dans les questions **17** à **21**, on suppose que

    f **est une solution du problème posé et que** $f(0) = 0$.
17. En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite de même type que celle des questions **12** à **16**, montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$.

    On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.
18. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x)$.
19. Montrer que g est dérivable en zéro.
20. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{g(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}}$.

    Montrer que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

    On pourra remarquer que g est dérivable en 0.
21. En déduire que g est linéaire.
22. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Exercice 2 On définit la fonction f par : $f(x) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)$.

1. Etudier la fonction f sur son ensemble de définition.
2. Montrer que l'intervalle $[3, 4]$ est stable par f : on rappelle que cela signifie $f([3, 4]) \subset [3, 4]$, ce qui peut se prouver par l'implication $(x \in [3, 4]) \Rightarrow (f(x) \in [3, 4])$.
3. Montrer que l'équation «$f(x) = x$» admet une unique solution ℓ sur $[3, 4]$.
4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [3, 4]$.
   (b) Ecrire un script en `Python` qui calcule u_n pour $n \in [\![0\,;\,10]\!]$.
   (c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{12}|u_n - \ell|$.
   (d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{12^n}$. Puis conclure quant à la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) A partir de quel rang n_0 est-on assuré que u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-14} près ?
5. On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n} \text{ et } w_n = u_{2n+1}.$$
   (a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
   (b) La valeur u_{n_0} trouvée à la question **(4e)** est-elle une valeur approchée de ℓ par défaut ou par excès ?