PROBLEME On définit la fonction f par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

1. (a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer les variations de f et de f' sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que f possède un et un seul point fixe, noté α, et que $\alpha \in [\frac{1}{3}, 1]$.
   Chercher le développement limité de f à l'ordre 3 en $x = 0$.
   Tracer la courbe représentative de f à l'aide de ces renseignements.

   (b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{1+u_n+u_n^2}.$$
   Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.

   (c) Montrer qu'il existe une constante $C \in]0, 1[$ telle que :
   $$\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \ |f'(x)| \leqslant C.$$
   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant C^n$. Conclusion ?
   Indiquer une méthode, puis l'appliquer, permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$$
   où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.
   Justifier l'unicité d'un tel polynôme P_n pour chaque entier n.

   (b) Etablir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = (1+X+X^2)P_n' - (n+1)(2X+1)P_n.$$

   (c) On note d_n, le coefficient dominant de P_n : prouver $d_n = (-1)^n(n+1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Rappeler la formule de Leibniz (hypothèses comprises).

   (b) En remarquant $(1+x+x^2)f(x) = 1$, établir que, pour tout entier $n \geqslant 2$:
   $$P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2} = 0.$$

   (c) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$: $P_n' = -(n+1)nP_{n-1}$.

4. (a) Soit β un **réel** : montrer que, pour $n \geqslant 2$, si β est racine de P_n et P_{n-1}, alors β est aussi racine de P_{n-2}. En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$ les polynômes P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine **réelle** commune.

   (b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, les racines **réelles** de P_n sont toutes simples (i.e d'ordre de multiplicité égal à un).
   On désire améliorer ce résultat en prouvant que chaque polynôme P_n possède exactement n racines réelles deux à deux distinctes.
   D'abord, on établit une *généralisation du théorème de Rolle*.

5. Soit a, un réel fixé et g, une fonction définie, continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ vérifiant
$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$
   (a) On définit la fonction φ sur le segment $[\arctan(a), \frac{\pi}{2}]$ par :
   $$\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [\arctan(a), \frac{\pi}{2}[,\ \varphi(x) = g(\tan x).$$
   Prouver qu'il existe $d \in]\arctan(a), \frac{\pi}{2}[$ tel que $\varphi'(d) = 0$.

   (b) En déduire l'existence de $c \in]a, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.

6. (a) Vérifier que P_1 a une seule racine qui est réelle, et que P_2 possède exactement deux racines, qui sont réelles et distinctes.

   (b) Soit un entier $n \geqslant 2$: on suppose que P_n possède n racines réelles distinctes, notées et classées comme : $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
   - Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f^{(n)}(\alpha_k) = 0$.
   - Déterminer les limites de $f^{(n)}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
   - En déduire que la fonction $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]\alpha_n, +\infty[$. De même, prouver que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]-\infty, \alpha_1[$.
   - Montrer que le polynôme P_{n+1} possède exactement $(n+1)$ racines réelles distinctes.

   (c) Conclusion ?

7. Question complémentaire

   (a) Justifier que f possède un développement limité, en $x = 0$, à tout ordre $n \geqslant 0$.
   On le note $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n)$. Liens entre les a_k et f ?

   (b) A l'aide de la question (3b), prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$.
   En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est périodique.