Exercice 1

Soit $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
A tout $f \in \mathcal{E}$, on associe $S(f) = f' + 2f$ et $T(f) = f' - 3f$.

ATTENTION : si $x \in \mathbb{R}$, $S\left(f(x)\right)$ n'a pas de sens, et $S\left(f\right)(x)$ en a un !.

1. Montrer que S définit un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
   De même, on prouverait que T définit un endomorphisme de $\mathcal{E}$ (inutile de le faire).
2. (a) De manière générale, avec $S \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, il y a une relation entre deux des trois noyaux suivants : $\mathrm{Ker}(S)$, $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Ker}(T \circ S)$. Laquelle ? Un preuve est attendue.
   (b) Même question avec les ensembles (images) $\mathrm{Im}(S)$, $\mathrm{Im}(T)$ et $\mathrm{Im}(T \circ S)$.
3. (a) Montrer que les noyaux $\mathrm{Ker}(S)$ et $\mathrm{Ker}(T)$ sont en somme directe dans $\mathcal{E}$.
   (b) Déterminer un système générateur du noyau $\mathrm{Ker}(S)$ de S.
   L'endomorphisme S est-il injectif ?
   (c) $\mathrm{Ker}(S)$ et $\mathrm{Ker}(T)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{E}$?
4. Résoudre, dans $\mathcal{E}$, l'équation différentielle : « $y'(x) + 2y(x) = (1 - x)e^{-x^2}$ ».
5. On définit la fonction ρ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\rho(x) = (1 - x)e^{-x^2}$.
   Préciser une expression de la fonction $T(\rho)$.
6. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, calculer $(T \circ S)(f)$ et $(S \circ T)(f)$.
   Les endomorphismes de $\mathcal{E}$, S et T, commutent-ils ?
7. On considère l'équation différentielle :
   $$(EH) \text{ « } y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0 \text{ ».}$$
   (a) Déterminer toutes les solutions, dans $\mathcal{E}$, de (EH).
   (b) Déterminer toutes les solutions, dans l'espace $\mathcal{E}$, de l'équation différentielle :
   $$(ED) \text{ «} y''(x) - y'(x) - 6y(x) = (2x^2 + x - 4)e^{-x^2} \text{ ».}$$

Exercice 2 Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On considère un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant
$$u^3 = u^2.$$
On note I pour l'application identité de E ($I = \mathrm{Id}_E$).

1. Prouver :
   (a) si u est un automorphisme de E, alors $u = I$.
   (b) si $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}\}$, alors $u = I$.
   (c) si $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ alors u est un projecteur de E.
2. Montrer $E = \mathrm{Im}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u^2)$.
3. Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(u - I) = \mathrm{Im}(u^2)$.