`Exercices 1 et 2 obligatoires, les suivants sont facultatifs.`

Exercice 1 Soit φ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+t^4}}$ et f par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f a une parité intéressante.
   On peut donc restreindre l'étude de f à $[0,+\infty[$: on supposera désormais $x > 0$.
3. Prolongement en $x = 0$.
   (a) Montrer : $\ln(2) - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)}$
   Indication : que vaut $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$?
   (b) En déduire : $0 \leqslant \ln(2) - f(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$.
   (c) Peut-on prolonger f par continuité en $x = 0^+$? Et en $x = 0$?
4. Dérivée
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
   (b) A l'aide du théorème `limite de la dérivée` (dont on vérifiera les hypothèses), montrer que l'on peut prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
5. Après avoir étudié la monotonie de φ, montrer :
   $$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
   Un dessin sera fortement apprécié.
6. Donner le tableau de variations de f (limites aux bords comprises) et son graphe sur $\mathbb{R}$.
7. Question bonus : avez-vous des idées pour calculer explicitement $f(x)$ ou, ce qui revient au même, pour calculer une primitive de φ sur $]0,+\infty[$?

Exercice 2 On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sa base canonique.
On note $I = \mathrm{Id}_E$ pour l'application identité de E.
On désigne par f l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Donner l'expression de $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle dont on précisera une équation cartésienne et un vecteur directeur $\vec{\varepsilon}_1$ de la forme $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ * \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f-I)$ est une droite vectorielle dont on précisera une équation cartésienne et un vecteur directeur $\vec{\varepsilon}_2$ de la forme $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ * \end{pmatrix}$.

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(f-4I)$ est une droite vectorielle dont on précisera une équation cartésienne et un vecteur directeur $\vec{\varepsilon}_3$ de la forme $\vec{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ * \end{pmatrix}$.

(e) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ est une base $\mathbb{R}^3$.

(f) Ecrire les matrices $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.
Quelle relation a-t-on entre les matrices A et D ? Entre A et G ? Entre G et D ?

(g) Indiquer une méthode de calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(h) Donner une base et une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.
Même question pour $\mathrm{Ker}(f)$. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$?

2. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$ soit diagonale de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

   (a) Ecrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h^2)$.

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels α, β, γ pour que $h^2 = f$.

3. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h^2 = f$.

   (a) Montrer : $h \circ f = f \circ h$.

   (b) En déduire que, pour tout réel λ, le sous-espace $N_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda I)$ est stable par h.

   (c) En déduire que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$ est une matrice diagonale.

4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{V} = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}$ est fini et préciser son cardinal ainsi que les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de ses éléments.

5. Résoudre l'équation $M^2 = A$ (d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Exercice 3 Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que
$$f^3 = I \text{ où } I = \mathrm{Id}_E, \text{ application identité de } E.$$
On note
$$u = f - I \quad \text{et} \quad v = f^2 + f + I \quad \text{puis} \quad F = \mathrm{Ker}(u) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(v).$$

1. <u>Dans cette question, on suppose que E est de dimension n.</u>

   (a) Montrer : $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

   (b) Montrer : $\mathrm{Im}(u) \subset G$ et $\mathrm{Im}(v) \subset F$.

   (c) En déduire $\dim(F) + \dim(G) \geqslant n$.

   (d) Montrer : $E = F \oplus G = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

2. <u>Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie $n = 2$.</u>

   (a) Que dire de f si $\dim(F) = 2$?

   (b) On suppose que $\dim(F) = 1$ et on note $\vec{e}_1$ un vecteur non nul de F.

      i. Montrer qu'il existe $\vec{e}_2$ dans G tel que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ soit une base de E.

      ii. Montrer que G est stable par f et en déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\vec{e}_2) = \alpha \vec{e}_2$.

iii. Montrer $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ et en déduire une contradiction.

(c) On suppose que $\dim(F) = 0$ et on fixe une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de E.

i. Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, f(\vec{e}_1))$ est une base de E.

ii. Ecrire la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$.

iii. Montrer l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1-a-a^2 \\ b^2 & -ab-b \end{pmatrix}$.

3. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$ (donc de dimension finie $n = 3$).
On note $\mathcal{C} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de E. Soit g l'endomorphisme de E défini par :
$$g(\vec{i}) = \vec{j} \quad \text{et} \quad g(\vec{j}) = \vec{k} \quad \text{et} \quad g(\vec{k}) = \vec{i}.$$

(a) Ecrire $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)$, la matrice de g sur la base $\mathcal{C}$.

(b) Prouver : $g^3 = I$.

(c) Déterminer le rang de $g - I$, puis le rang de $I + g + g^2$.

(d) En déduire la dimension et une base de $A = \mathrm{Ker}(g - I)$.
Même question pour $B = \mathrm{Ker}(g^2 + g + I)$.

(e) Montrer que B est stable par g.
En déduire qu'il existe une base $\mathcal{D}$ de E et $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & \left(\dfrac{-1-a-a^2}{b}\right) \\ 0 & b & -a-1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $3n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et f, un endomorphisme de E de rang $2n$.

1. (a) Que vaut $\dim(\mathrm{Ker}(f))$?

(b) Soit g, la restriction de f au sous-espace $\mathrm{Im}(f)$: on rappelle que cela signifie
$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \end{array} \right. .$$
Montrer : $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
En déduire : $\mathrm{rg}(f^2) \geqslant n$.

2. On suppose désormais, en plus, $f^3 = 0$.

(a) Déterminer la valeur de $\mathrm{rg}(f^2)$.

(b) Soit S, un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f^2)$ dans E. Montrer que S est de dimension n.
On considère alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, une base de S.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n), f^2(\vec{e}_1), f^2(\vec{e}_2), \dots, f^2(\vec{e}_n)\big)$ est une base de E.

(d) Ecrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Exemple : soit φ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Que vaut φ^3 ? Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E pour lequel il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = I$ (où $I = \mathrm{Id}_E$ désigne l'application identité de E).

1. Montrer que u est bijectif.
2. Montrer que, si F est un sous-espace vectoriel de E qui est stable par u, alors u induit un automorphisme de F. On rappelle que cela signifie prouver que, en définissant sur F l'application v par
$$\forall \vec{x} \in F,\, v(\vec{x}) = u(\vec{x}),$$
alors $v \in \mathcal{L}(F)$ (i.e v endomorphisme de F) et v bijectif.
3. Soit F, un sous-espace vectoriel de E stable par u.
   (a) Soit p, un projecteur de E d'image F. Montrer que l'application
   $$q = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{-k}$$
   est un projecteur de E d'image F.
   (b) Montrer que u et q commutent.
   En déduire que F possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 6 Soit E, un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit f et g, deux endomorphismes de E tels que :
$$f + g = \mathrm{Id}_E \text{ et } \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n$$
où $\mathrm{rg}(h)$ désigne le rang de l'endomorphisme $h \in \mathcal{L}(E)$.

1. Prouver que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont en somme directe.
2. Prouver que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires dans E.
3. Montrer que f et g sont des projecteurs de E.
4. Peut-on trouver des endomorphismes α et β de E tels que $\alpha + \beta = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}(\alpha) + \mathrm{rg}(\beta) < n$? Si oui, exhiber un exemple.
5. Peut-on trouver des endomorphismes α et β de E tels que $\alpha + \beta = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}(\alpha) + \mathrm{rg}(\beta) > n$? Si oui, exhiber un exemple.