Exercice 1

Un joueur décide de jouer aux machines à sous.

Il va jouer sur deux machines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui sont réglées de la facon suivante :

– la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{A}$ est de $\dfrac{1}{5}$.

– la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{B}$ est de $\dfrac{1}{10}$.

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante :

– il commence par choisir une machine au hasard.

– après chaque partie :

- il change de machine s'il vient de perdre
- il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On définit, pour tout entier $k \geqslant 1$, les événements suivants :

– $G_k =$ « le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie » .

– $A_k =$ « la $k^{\text{ième}}$ partie se déroule sur la machine $\mathcal{A}$ » .

1. Determiner la probabilité de gagner la première partie.
2. Justifier : $A_{k+1} = (A_k \cap G_k) \cup \left(\overline{A_k} \cap \overline{G_k}\right)$.
   Puis exprimer $\mathbb{P}(A_{k+1})$ à l'aide de $\mathbb{P}(A_k)$.
3. Exprimer $\mathbb{P}(G_k)$ en fonction de $\mathbb{P}(A_k)$.
4. Exprimer $\mathbb{P}(A_k)$ puis $\mathbb{P}(G_k)$ en fonction de $k \geqslant 1$.
5. On note p_n la probabilité, sachant que la $n^{\text{ième}}$ partie a été gagnée, qu'elle ait eu lieu sur la machine $\mathcal{A}$. Calculer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interprétation ?

Exercice 2

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n.

On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons. On suppose qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (nombre qui peut être égal à 0).

Autrement dit, si on note A_i l'événement « on a tiré i jetons», alors : $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{n+1}$.

On définit les événements

- $U =$ « on a pioché le jeton 1 ».
- $D =$ « on a pioché le jeton 2 ».

1. On désire calculer la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans notre poignée.
   (a) Dénombrer le nombre de poignées ayant i jetons, et le nombre de poignées ayant i jetons et contenant le jeton numéro 1.
   (b) En déduire $\mathbb{P}_{A_i}(U)$ puis $\mathbb{P}(U)$.
2. Les événements U et D sont-ils indépendants ?
3. On se place désormais dans le cas où ce n'est plus le nombre de jetons qui est réparti uniformément, mais où on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles.
   (a) Quelle est le nombre de poignées possibles ? Combien contiennent i jetons ?
   En déduire $\mathbb{P}(A_i)$ dans ce cas.
   (b) Répondre aux mêmes questions que dans les questions **(1.)** et **(2.)**.